深度课堂的教学实践

——以“阿基米德三角形”教学为例

朱振华

(浙江省湖州市菱湖中学,313018)

随着课改的深入,广大一线教育工作者将更加重视课堂教学的深度. 所谓深度教学是指让学生深度参与教学过程且深刻把握学习内容的教学,能正确反映学科的本质,用学科特有的精神和文化去打造学生的学科素养,用学科特有的魅力和美感去激发学生的学习动力. 本文以“阿基米德三角形”课堂教学为例,反思深度教学的过程,以期为广大师生更好地提高课堂教学的效果提供参考.

一、深度教学的实质与意义

深度教学是当前教育领域的一个重要概念,随着教育改革的不断深入,教师和学生都对教育有着更高的期望. 在探索教育发展中,深度教学越来越受到教育工作者的重视. 数学深度教学是指注重挖掘数学概念的内涵和外延,重视培养学生多方面的能力以及领悟数学的思想方法,如数学语言能力、归纳能力、分析探究能力和类比思想、数形结合思想、化归思想等,从而实现数学核心素养养成的教学过程.

二、深度课堂的探索

在高三数学二轮专题复习中,笔者聆听了“阿基米德三角形”一课,现将课堂内容整理如下.

1. 阿基米德三角形的概念

过圆锥曲线上任意两点 A,B 分别作两条切线相交于点 P,则称 $\triangle PAB$ 为阿基米德三角形,其中 $\angle APB$ 为顶角,AB 为底边. 当底边 AB 过圆锥曲线的焦点时,$\triangle PAB$ 称为阿基米德焦点三角形. 如图 1 分别为椭圆、双曲线和抛物线的阿基米德三角形.

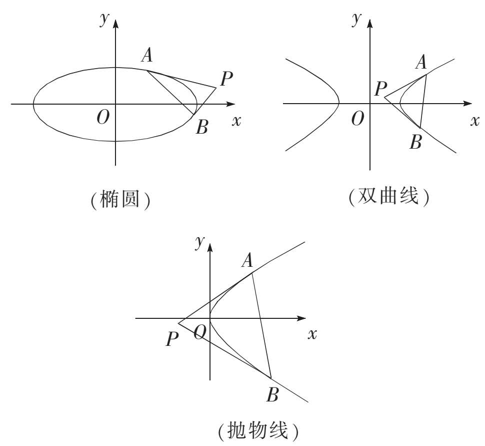

图 1

2. 阿基米德三角形的性质

已知 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$ 分别是抛物线 $C: x^2=2py$ 上的任意两点,以 A,B 两点分别为切点的切线相交于点 P,则有以下性质:

性质 1 点 P 的坐标为 $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{x_1x_2}{2p}\right)$.

性质 2 底边 AB 所在的直线方程为 $(x_1+x_2)x-2py-x_1x_2=0$.

性质 3 $\triangle PAB$ 的面积 $S=\dfrac{|x_1-x_2|^3}{8p}$.

性质 4 若阿基米德三角形的底边 AB 过定点 $(0,m)$ $(m>0)$,则有

(1) 顶点 P 的轨迹方程为 $y=-m$;

(2) 两条切线的斜率 k_{AP},k_{BP} 的乘积为定值 $-\dfrac{2m}{p}$;

(3) 当 $m=\dfrac{p}{2}$,底边 AB 过焦点 F 时,点 P 在准线 $y=-\dfrac{p}{2}$ 上,且 $PA\perp PB$,$PF\perp AB$.

性质5　在阿基米德三角形中，$\angle PFA = \angle PFB$.

（在此教学环节中，教师将以上性质通过幻灯片进行放映，并没有给出相应的证明与说明.）

3. 阿基米德三角形的应用

类型1　线段长度问题

例1　已知点 F 为抛物线 $C:y^2 = 2px$ 的焦点，过点 F 的直线 l 与该抛物线交于 A,B 两点，l_1,l_2 分别是该抛物线 C 在点 A,B 的两条切线，l_1,l_2 相交于点 P，设 $|AF| = a$，$|BF| = b$，求 $|PF|$ 的值.

教师：由性质4知 $\triangle PAB$ 为直角三角形，且 $PF \perp AB$. 由直角三角形的射影定理知 $|PF|^2 = |AF|\cdot|BF| = ab$，故 $|PF| = \sqrt{ab}$.

例2　已知点 $A_n(x_n,y_n)$ 是抛物线 $C: x^2 = 4y$ 上的点，其中 $n \in \mathbf{N}^*$ 过焦点 F 的直线 FA_n 交抛物线于另一点 $B_n(s_n,t_n)$.

（1）求证：$x_ns_n = -4$；

（2）取 $x_n = 2^n$，记 P_n 为抛物线上分别以 A_n,B_n 为切点的两条切线的交点，求证：$|FP_1| + |FP_2| + \cdots + |FP_n| = 2^n - 2^{-n+1} + 1$.

教师：（1）只需要利用性质4即可得到 $x_ns_n = -2p = -4$.

（2）由性质1知，点 $P_n\left(\frac{x_n + s_n}{2}, -1\right)$，根据两点间的距离公式得 $|FP_n|^2 = \left(\frac{x_n + s_n}{2}\right)^2 + 4 = \frac{x_n^2 + s_n^2}{4} + 2 = \frac{x_n^2}{4} + \frac{4}{x_n^2} + 2 = \left(\frac{x_n}{2} + \frac{2}{x_n}\right)^2$，从而 $|FP_n| = \frac{x_n}{2} + \frac{2}{x_n}$. 最后只需要利用分组求和法就可得到所要证明的结论.

（教师解题思路清晰，但学生缺乏思考时间，理解不够深刻.）

类型2　轨迹方程问题

例3　已知抛物线 $C_1: x^2 = 4y$，$C_2: x^2 = -2py(p > 0)$，点 $M(x_0,y_0)$ 是抛物线 C_2 上的一动点，当 $x_0 = 1 - \sqrt{2}$ 时，抛物线 C_1 的切线 MA 的斜率为 $-\frac{1}{2}$.

（1）求 p 的值；

（2）当 $M(x_0,y_0)$ 在抛物线 C_2 上运动时，求线段 AM 的中点 N 的轨迹方程.

教师：（1）可以利用导数法求出切点 A 的坐标 $\left(-1,\frac{1}{4}\right)$，再利用斜率公式求出点 M 的坐标 $\left(1 - \sqrt{2},\frac{2\sqrt{2} - 3}{4}\right)$，从而得出 $p = 2$.

（2）由性质1得出点 $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2},\frac{x_1x_2}{4}\right)$，利用中点坐标公式得出 $N\left(\frac{x_1 + x_2}{2},\frac{x_1^2 + x_2^2}{8}\right)$，由于点 $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2},\frac{x_1x_2}{4}\right)$ 在抛物线 C_2 上，从而 $x_1x_2 = -\frac{x_1^2 + x^2}{6}$，可以得到线段 AM 的中点 N 的轨迹方程是 $x^2 = \frac{4}{3}y(x \neq 0)$.

（教师解题思路清晰，学生仍然缺乏思考时间，很多同学看上去一脸懵懂.）

类型3　定点定值问题

例4　已知抛物线 $C: x^2 = 2py(p > 0)$，其焦点为 F，点 O 为坐标原点，过焦点 F 作斜率为 $k(k \neq 0)$ 的直线，交抛物线 C 于 A,B 两点，过 A,B 两点分别作抛物线 C 的两条切线，这两条切线交于点 M.

（1）求 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 的值；

（2）设直线 MF 与抛物线相交于 C,D 两点，且四边形 $ABCD$ 的面积为 $\frac{32}{3}p^2$，求直线 AB 的斜率 k.

教师：（1）可以利用焦点弦的有关结论直接得到 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = x_1x_2 + y_1y_2 = \frac{p^2}{4} + (-p^2) = -\frac{3}{4}p^2$.

（2）由弦长公式可得 $|AB| = \sqrt{1 + k^2}|x_1 - x_2| = 2p(k^2 + 1)$，再利用性质4得到 $MF \perp AB$. 从而有 $|CD| = 2p\left(\frac{1}{k^2} + 1\right)$，最后由 $S_{\text{四边形}ABCD} = 2p^2\left(k^2 + \frac{1}{k^2} + 2\right) = \frac{32}{3}p^2$，解得 $k =$

$\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

4. 课堂练习与小结(略)

由上述过程可以看出,在整个教学活动中,教师处于主导地位,学生处于被动接受地位,缺乏独立思考与深入探索. 一节课下来,大多数同学仍然知其然而不知其所以然.

如何让学生深度参与教学过程且深刻把握学习内容,正确反映学科的本质,用学科特有的精神和文化去打造学生的学科素养,用学科特有的魅力和美感去激发学生的学习动力?为此,可将“阿基米德三角形”分成如下两个课时: 第一课时是性质的阐述; 第二课时是性质的应用. 设计一系列问题,引导学生积极思考,深度参与.

第一课时:

例题 已知 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$ 分别是是抛物线 $C:x^2=2py$ 上的任意两点,以 A,B 两点分别为切点的切线相交于点 P,则点 P 的坐标为 $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{x_1x_2}{2p}\right)$.

问题 1 抛物线 $C:x^2=2py$ 的开口向哪个方向?

问题 2 抛物线 $C:x^2=2py$ 在点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$ 处的切线斜率如何求?(引导学生利用导数求解).

问题 3 由切线 PA 的方程: $2py=2x_1x-x_1^2$,你能快速给出切线 PB 的方程吗?

问题 4 根据两条切线方程你能得出点 P 坐标吗?

问题 5 从两条切线方程中你还能得到什么结论吗?(引导学生得出点 P 的轨迹方程)

第二课时:

例题 已知点 $A_n(x_n,y_n)$ 是抛物线 $C:x^2=4y$ 上的点,其中 $n\in\mathbf{N}^*$ 过焦点 F 的直线 FA_n 交抛物线于另一点 $B_n(s_n,t_n)$.

(1) 求证: $x_ns_n=-4$;

(2) 取 $x_n=2^n$,记 P_n 为抛物线上分别以 A_n,B_n 为切点的两条切线的交点,求证: $|FP_1|+|FP_2|+\cdots+|FP_n|=2^n-2^{-n+1}+1$.

问题 1 过焦点的弦,两交点坐标之间有什么性质?

问题 2 根据阿基米德三角形的性质 4,点 P_n 的坐标与 A_n,B_n 的坐标有什么关系?

问题 3 根据两点间的距离公式,如何求 $|FP_n|$?

问题 4 由 $|FP_n|=\frac{x_n}{2}+\frac{2}{x_n}$ 和 $x_n=2^n$,如何计算 $|FP_1|+|FP_2|+\cdots+|FP_n|$?

(引导学生利用分组求和得出结论)

三、深度课堂的教学反思

1. 深度课堂是立足于真实情境的问题解决的教学

核心素养离不开知识,但单纯的知识不等于素养,只有将知识与技能用于解决复杂问题和处理不可预测情境所形成的综合能力才是核心素养. 深度课堂教学强调让学生在真实情境里,通过自主与合作学习,迁移所学知识,解决实际问题.

2. 深度课堂是突出深度思辨的思维指向的教学

就学习而言,假设、推断、思辨、想象、联想比知识更重要. 通过思辨培养学生敢于实践、勇于探究的科学精神和追求真理、敢于质疑的批判性思维,并引导学生去关注人与自我、人与他人、人与自然、人与社会的关系,去思考人类的幸福和未来; 通过思辨引导学生根据具体问题,独立思考、自主判断,比较和辨析不同观点,去发现新问题、提出新观点、探寻新规律. 因此,深度课堂教学具有区别于传统学习的上述显著特征,深度课堂教学更符合核心素养的培养.

3. 深度课堂是基于高质量问题的教学

“教学过程是一种提出问题、解决问题的持续不断的过程”. 若干年前的一则报道,标题为“他们为什么不鼓掌”. 说的是国外的一个教育代表团到上海希望听一节中国特色的科学教育的公开课,下课时听课的中国同行禁不住掌声雷动,而听课的国外同行却面无表情. 事后国外同行提出了这样的疑问: 这堂

课老师问问题,学生回答问题,学生没有带着一个问题进课堂,也没有带着一个问题出课堂,学生更没有提出高质量的问题,这堂课还有上的价值和必要吗?基于核心素养的教学应该是基于问题的探究性教学,教学的中心是问题的发现、提出和解决. 而问题教学的最高境界是引导、鼓励学生提出高质量的问题. 新课改实施以来,不可否认的是教师的问题意识增强了,问题教学成为了常态,但问题的质量不高,缺乏那种牵一发动全身的“大问题、主问题、核心问题、高阶思维问题”,尤其是教师主导问题的状况并没有得到根本性解决. 问题教学需要“2.0 的升级版”,即问题从单一走向综合、从封闭走向开放、从“一对一”走向“一对多”、从知识的记忆巩固走向问题探究,从浅层思维走向高阶思维,尤其要改变“唯标准答案的倾向”,从“基于答案”走向“通过答案”,培养学生的怀疑精神、批判性思维和创新能力.

4. 深度课堂教学是学生充分参与的教学

就学生在教学过程中的投入程度来讲,深度教学是让学生充分参与的教学,因此教师只能进行“有限教导”. 在教学中,教师必须尽力控制自己的讲授、指导,给学生充足的学习机会: 一方面,教师要“少讲”,以便给学生足够的学习时间; 另一方面,教师要“隐身”,以便让学生全身心地投入学习. 只有通过自学和合作学习都无法完成的任务,教导才是必要的.

总之,数学教学只有深入方可浅出,才能真正达到举重若轻的效果. 数学课堂教学需要教师巧设疑问,合作探讨、激发兴趣,从而提高学生的数学素养. 这就需要转变教学思想,注重培养学生数学的反思能力和思维能力,丰富教学形式,提高课堂的生动性,注重学生的接受能力,科学合理地进行课堂教学,明确深度课堂教学在高中数学教学中的作用,引导学生进行深度学习,促进学生数学核心素养的提升.

参考文献

[1] 刘丽丽,李静. 理解视角下的深度学习研究[J]. 当代教育科学,2016(20).

[2] 安富海. 促进深度学习的课堂教学策略研究[J]. 课程. 教材. 教法,2014(11).

(上接第 33 页)

6. 布置作业,综合延伸

(1) 课本第 32 页练习 7.4 第 2、第 4 题;

(2) 练习部分: 习题 7.4 A 组;

(3) 网上查阅了解哥德巴赫猜想与费马大定理.

三、几点说明

(1) 数学归纳法是一种用于证明与自然数 n 有关的命题正确性的证明方法,它的操作步骤简单、明确,教学重点不应该仅仅是方法的应用,还应强化数学归纳法产生过程的教学. 数学归纳法的两个步骤,不是教师直接给出,而是师生共同讨论探索得出.

(2) 在方法设计上采用了在教师指导下的师生共同讨论、探索,目的是加强学生对教学过程的参与. 为了使这种参与有一定的智能度,教师应做好发动、组织、引导和点拨. 学生的思维参与往往是从问题开始的,本节课按照思维次序编排了一系列问题串,让学生投入到思维活动中来. 把本节课的研究内容置于问题之中,在逐步展开中,引导学生用已学的知识、方法予以解决,并获得知识体系的更新与拓展.

(3) 运用数学归纳法证明与正整数有关的数学命题,两个步骤缺一不可. 理解数学归纳法中的递推思想,尤其要注意第二步证明 $n = k + 1$ 命题成立时必须要用到 $n = k$ 时命题成立这个条件,这也是这节课的难点,设计中采用反例辨误,加深递推思想的理解.