高中数学自主学习研究
——以三角函数与解三角形的“开放性”问题为例

吕莹(山东省淄博市桓台县渔洋中学 256400)

【摘 要】 “开放性”问题是高考中一种灵活性很高的问题,这类问题通常对题目中的某一条件进行创新设计,要求学生能够快速抓住问题的关键点,面对不同的补充条件运用基础的数学知识和技巧进行解答,考查学生对于数学基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验这“四基”的掌握情况.本文以三角函数与解三角形的“开放性”问题为例,列举两道例题进行分析解答,以期帮助学生对解答“开放性”问题的方法与技巧有更深的了解,在解题时能够灵活应用,举一反三.

【关键词】 高中数学;三角函数;解三角形

以三角函数及解三角形为背景的开放性问题是一种创新性很高的题型,题目条件多变,解答方法灵活,对解题的技巧性要求较高.要求学生拥有独立思考的能力和自主学习研究的方法,能够从不同视角对问题进行切入分析,抓住问题的关键点,然后综合运用已学的基础知识和思想方法,选择最合适的补充条件进行解答.在这一过程中,学生需要根据自己所擅长的解题方法,对给出的多个补充条件进行快速推理判断,给不同层次、水平的学生提供了更加充分发挥数学能力的空间以及独立思考的机会,很好地提升了学生思维的灵活性与开放性.

例1 已知$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c,其中$a=2$,且$\triangle ABC$的面积也为2.请在以下两个条件中任选一个,作为补充条件求出b的值.

(1)$a\cos B=b\sin A$;

(2)$b^2+\sqrt{2}ac=a^2+c^2$.

分析 对于这类任选条件的开放性问题,要充分理解题设条件和备注的要求,从给出的几个待选条件中任意选择其中的一个条件,将试题补充完整,然后结合题干已知的条件来分析与解答即可.作为例题讲解,我们这里对两个条件的解题思路都作分析.若选条件(1),则利用正弦定理进行化简,求得$\tan B$后,再得到B,然后利用三角形的面积公式求得c,再利用余弦定理求得b;若选条件(2),则利用余弦定理化简,求得$\cos B$后,再求得B,然后同理利用三角形的面积公式求得c,再利用余弦定理求得b.

解 若选择(1),由正弦定理得$\sin A\cos B=\sin B\sin A$,

易得$\tan B=1$,$B=\frac{\pi}{4}$.

又因为$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=2$,$\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$a=2$,

所以$c=2\sqrt{2}$,

由余弦定理得$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=4$,

所以$b=2$(负值舍去).

若选择(2),由余弦定理得

$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

则$B=\frac{\pi}{4}$,

同理(1)可求得$b=2$.

点评 这道题无论选择哪一个补充条件,关键就是求出B的值,然后根据三角形的面积公式求得c,再利用余弦定理求得b的值.所以不论选择哪个条件,从哪个角度进行切入分析,都是要为求出B值这一目的而服务.因此在思考的过程中,就需要根据题干中已知条件的特点,对2个待选的补充条件进行快速分析推理,选择最方便快捷求出B值的条件即可.这一过程要求我们对三角函数与解三角形的知识有非常深入的研究和理解,对这一类开放性

问题的变化形式也要多记多看,做到心中有题.

例2 在$\triangle ABC$中,已知角A,B,C的对边分别为a,b,c,其中$a=2\sqrt{6}$,$b+c=6$,请在以下两个条件中任选一个,作为补充条件求出$\triangle ABC$的面积.

(1)$a\sin B=b\cos\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$;

(2)$(a+b)(\sin A-\sin B)=(c-b)\sin C$.

分析 解答三角函数与解三角形开放性问题的过程中,正弦定理或余弦定理的选择是其中的关键.利用正弦定理可解决这两类三角形问题:一是已知两角和一角的对边,求其他边或角;二是已知两边和其中一边的对角,求其他边或角.而利用余弦定理则可以解决以下两类三角形问题:一是已知两边和它们的夹角,求其他边或角;二是已知三边求角,注意这两种情形下的三角形是唯一确定的,其解也是唯一的.作为例题讲解,我们这里对两个条件的解题思路都作分析.若选条件(1),则利用正弦定理化简,求得$\cos A$后得到A的值,然后根据题目中给出的a,b,c之间的等量关系,求得bc的值,再利用三角形的面积公式求出$\triangle ABC$的面积;若选条件(2),同样是利用正弦定理化简,求得$\tan A$后得到A的值,然后根据a,b,c之间的等量关系,求得bc的值,再利用三角形的面积公式求出$\triangle ABC$的面积.

解 若选(1),由正弦定理得:

$\sin A\sin B=\sin B\cos\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$,

而$\sin B\neq 0$,

所以$\sin A=\cos\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$,

化简得$\tan A=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

而$A\in(0,\pi)$,

所以$A=\frac{\pi}{6}$,

又因为$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\frac{\pi}{6}$,

$a=2\sqrt{6}$,$b+c=6$,

所以$bc=\frac{(b+c)^2-a^2}{2+\sqrt{3}}=24-12\sqrt{3}$,

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=6-3\sqrt{3}$,

若选择(2),由正弦定理得$(a+b)(a-b)=(c-b)c$,即$b^2+c^2-a^2=bc$,

则$\cos A=\frac{1}{2}$,

而A的取值范围为$(0,\pi)$,

所以$A=\frac{\pi}{3}$,

又因为$a^2=b^2+c^2-bc=(b+c)^2-3bc$,$a=2\sqrt{6}$,$b+c=6$,

所以$bc=4$.

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

点评 在例1中,无论选择条件(1)还是条件(2),最后解得的b值是相同的,因为解答的最后步骤都是利用三角形的面积这一个公共已知条件来求出答案,因此当B的值相同时,最后解得的b值必然是相同的.而在例2中,选择不同的补充条件时,最终求得的三角形的面积是不同的,这也是我们在解答这类问题时需要注意的点,有时不能通过同时求出两个补充条件的答案来检验自己的作答是否正确.

结语

在创新的学习环境中,学生需要具备一定的自主研究学习能力,这样他们才能够基于已学的知识基础,以创新的方式来理解知识点,构建知识框架,解决疑难问题,最终实现对知识的创造性理解和认知.这样既可以在遇到已见过的问题时轻松作答,也可以在面对新题型的时候举一反三.

参考文献:

[1] 高亚丽.高中数学教学中学生自主学习能力的培养策略[A][C].华教创新(北京)文化传媒有限公司,中国环球文化出版社.2022现代教育课程建设与教学改革论坛论文集(二).吉林省白城市通榆县第一中学.

[2] 李莉.新课程背景下对提高学生自主学习能力的策略研究[J].数学学习与研究,2023(01):143-145.

[3] 周丽娇.开放探究,创新应用——三角函数及解三角形问题[J].中学生数理化(高考数学),2023(01):17-19.