递推关系在概率中的应用

430062　湖北大学附属中学　**赵祥燕　江　河**

在解决某些涉及自然数 n 的概率问题时，如果能从问题的背景中探究出概率问题的递推关系，往往可以起到事半功倍的效果．下面通过几个例子加以说明．

例 1　在正四面体的一个顶点处，有一只蚂蚁每一次都以 $\frac{1}{3}$ 的概率从一个顶点爬到另一个顶点．

(1) 求它爬行了 2、3、4 次又分别回到起点的概率；

(2) 求它爬行了 $n(n \geqslant 1$ 且 $n \in \mathbf{N})$ 次又回到起点的概率．

解　(1) 假设蚂蚁从正四面体的顶点 A 出发，爬行了 $n(n \geqslant 1$ 且 $n \in \mathbf{N})$ 次又爬回到顶点 A 的概率为 a_n．那么，没回到 A 点的概率为 $1 - a_n$．由此可得，爬行 $n + 1$ 次又回到顶点 A 的概率为 $\frac{1}{3}(1 - a_n)$，即 $a_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - a_n)$．其中，爬行 1 次回到顶点 A 是不可能事件．

$\therefore \quad a_1 = 0.$

$$a_2 = \frac{1}{3}(1 - 0) = \frac{1}{3},$$

$$a_3 = \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{3}) = \frac{2}{9},$$

$$a_4 = \frac{1}{3}(1 - \frac{2}{9}) = \frac{7}{27}.$$

(2) 下面由递推关系求出通项：

$$\because \quad a_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - a_n),$$

$$\therefore \quad a_{n+1} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}(a_n - \frac{1}{4}),$$

又 $\because \quad a_1 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$，

$\therefore$　数列 $\{a_n - \frac{1}{4}\}$ 是首项为 $a_1 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$，公比为 $-\frac{1}{3}$ 的等比数列．

$$\therefore \quad a_n - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}(-\frac{1}{3})^{n-1}$$

$$\Rightarrow \quad a_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(-\frac{1}{3})^{n-1},$$

$$\therefore \quad a_n = \frac{1}{4}[1 - (-\frac{1}{3})^{n-1}].$$

例 2　设棋子在正四面体 $ABCD$ 的表面从一个顶点移向另外三个顶点是等可能的．现抛掷骰子根据其点数决定棋子是否移动．若投出的点数是奇数，则棋子不动；若投出的点数是偶数，则棋子移动到另一顶点，若棋子的初始位置在顶点 A．求：

(1) 投 2 次骰子，棋子才到达顶点 B 的概率是多少?投 $n(n \geqslant 1$ 且 $n \in \mathbf{N})$ 次骰子呢?

(2) 投了 3 次骰子，棋子恰巧在顶点 B 的概率是多少?投了 $n(n \geqslant 1$ 且 $n \in \mathbf{N})$ 次骰子呢?

解　(1) 设投 $n(n \geqslant 1$ 且 $n \in \mathbf{N})$ 次骰子，棋子才到达顶点 B 的概率为 a_n．那么，没到达顶点 B 的概率为 $1 - a_n$．所以，投 $n + 1$ 次骰子，棋子才到达顶点 B 的概率为：

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}(1 - a_n),$$

$$\therefore \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}(1 - a_n),$$

即 $\quad a_{n+1} = \frac{1}{6}(1 - a_n)$

$$\Rightarrow \quad a_{n+1} - \frac{1}{7} = -\frac{1}{6}(a_n - \frac{1}{7}),$$

又 $\because \quad a_1 = \frac{1}{6}$，

$$\therefore \quad a_1 - \frac{1}{7} = \frac{1}{42},$$

$\therefore$　数列 $\{a_n - \frac{1}{7}\}$ 是首项为 $a_1 - \frac{1}{7} = \frac{1}{42}$，公比为 $-\frac{1}{6}$ 的等比数列．

$$\therefore \quad a_n - \frac{1}{7} = \frac{1}{42}(-\frac{1}{6})^{n-1}$$

$$\Rightarrow \quad a_n = \frac{1}{7} - \frac{1}{7}(-\frac{1}{6})^{n}.$$

$$\therefore \quad a_2 = \frac{5}{36}, \quad a_n = \frac{1}{7}[1 - (-\frac{1}{6})^{n}].$$

(2) 设投了 $n(n \geqslant 1$ 且 $n \in \mathbf{N})$ 次骰子，棋子恰巧在顶点 B 的概率为 b_n，则不在顶点 B 的概率为 $1 - b_n$．

投了 $n + 1$ 次骰子，棋子恰巧在顶点 B 的情况分两种；

① 投了 n 次后棋子在顶点 B，第 $n + 1$ 次投出的点数又是奇数，其概率为 $\frac{1}{2}b_n$；

② 投了 n 次后棋子不在顶点 B，第 $n + 1$ 次投出的点数又是偶数，其概率为

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}(1 - b_n),$$

$$\therefore \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}(1 - b_n)$$

$$\Rightarrow \quad b_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{6},$$

$$\therefore \quad b_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3}(b_n - \frac{1}{4}),$$

又 $\because\ b_1-\frac{1}{4}=\frac{1}{6}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{12}$,

$\therefore$ 数列 $\{b_n-\frac{1}{4}\}$ 是首项为 $b_1-\frac{1}{4}=-\frac{1}{12}$, 公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列.

$\therefore\ b_n-\frac{1}{4}=(-\frac{1}{12})(\frac{1}{3})^{n-1}$

$\Rightarrow\ b_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}(\frac{1}{3})^n$.

$\therefore\ b_3=\frac{13}{54},\quad b_n=\frac{1}{4}[1-(\frac{1}{3})^n]$.

例 3 有人玩掷硬币走跳棋的游戏, 已知硬币出现正反面的概率都是 $\frac{1}{2}$, 棋盘上标有第 0 站, 第 1 站, 第 2 站, … 第 100 站, 一枚棋子开始在第 0 站, 棋手每掷一次硬币棋子向前跳动一次, 若掷出正面, 棋子向前跳一站 (从 k 到 $k+1$), 若掷出反面, 棋子向前跳二站 (从 k 到 $k+2$), 直到棋子跳到第 99 站 (胜利大本营) 或跳到第 100 站 (失败集中营) 时, 该游戏结束, 设棋子跳到第 n 站的概率为 p_n.

(1) 求 p_0、p_1、p_2 的值;

(2) 求 p_{99} 及 p_{100} 的值.

解 (1) 棋子开始在第 0 站是必然事件,

$\therefore\ p_0=1$,

第一次掷硬币出现正面, 棋子跳到第 1 站, 其概率为 $\frac{1}{2}$, $\therefore\ p_1=\frac{1}{2}$.

棋子跳到第 2 站分两种情况:

① 前两次掷硬币都出现正面, 其概率为

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$

② 第一次掷硬币出现反面, 其概率为 $\frac{1}{2}$,

$\therefore\ p_2=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$.

(2) 棋子跳到第 n ($2\leqslant n\leqslant 99$ 且 $n\in\mathbf{N}$) 站的情况分两种:

① 棋子先跳到第 $n-2$ 站, 又掷出反面, 其概率为 $\frac{1}{2}p_{n-2}$,

② 棋子先跳到第 $n-1$ 站, 又掷出正面, 其概率为 $\frac{1}{2}p_{n-1}$,

$\therefore\ p_n=\frac{1}{2}p_{n-1}+\frac{1}{2}p_{n-2}$.

$\therefore\ p_n-p_{n-1}=-\frac{1}{2}(p_{n-1}-p_{n-2})$,

又 $\because\ p_1-p_0=-\frac{1}{2}$,

$\therefore$ 数列 $\{p_n-p_{n-1}\}$ 是首项为 $p_1-p_0=-\frac{1}{2}$, 公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列.

$\therefore\ p_n-p_{n-1}=(-\frac{1}{2})^n$.

分别令上式中 $n=1,2,3,\cdots,99$, 再将所得各式相加, 得

$$p_{99}-p_0=-\frac{1}{2}+(-\frac{1}{2})^2+\cdots+(-\frac{1}{2})^{99},$$

$$\therefore\ p_{99}=1+\frac{(-\frac{1}{2})[1-(-\frac{1}{2})^{99}]}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}[1-(\frac{1}{2})^{100}]$$

及 $p_{98}=\frac{2}{3}[1+(\frac{1}{2})^{99}]$,

$\therefore\ p_{100}=\frac{1}{2}p_{98}=\frac{1}{3}[1+(\frac{1}{2})^{99}]$.

可见, 这类涉及自然数 n 的概率问题, 解题关键是从问题的背景中探究出概率问题的递推关系, 同时还要注意区别题目中的相关条件, 如例 2 中的"才到达顶点 B"与"恰巧在顶点 B", 例 3 中"游戏结束的条件"等, 因为这些条件往往涉及递推关系的首项与末项的取值, 审题时要特别留心.

(收稿日期: 20050828)

用导数解决一类数列求和问题

443000　湖北省宜昌市夷陵中学　**杨　明**

数列是一种特殊的函数, 因此某些数列类求和问题可以化归为函数问题, 用导数的方法加以解决.

例 1 (人教版《数学》第一册(上) P137 第 6 题) 求和: $S=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$.

解 构造函数 $f(x)=x+x^2+x^3+\cdots+x^n=\frac{x(1-x^n)}{1-x}=\frac{x-x^{n+1}}{1-x}$, $(x\neq 1)$.

求该函数的导函数得

$S=f'(x)=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$

$=\frac{(1-x)[1-(n+1)x^n]+x-x^{n+1}}{(1-x)^2}$.

评注 这种构造函数的方法可以解决等差数列与等比数列对应项的积构成的新数列的前 n 项的和. 如若等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1, 公差为 d, 等比数列 $\{b_n\}$ 的首项为 b_1, 公比为 q $(q\neq 1)$, 则数列 $\{a_nb_n\}$ 的通项记为 $c_n=[a_1+(n-1)d]b_1q^{n-1}=(a_1-d)b_1q^{n-1}+dnq^{n-1}$, 所以求 $\{c_n\}$ 的前 n 项的和可以裂为两项分别求和, 前一项是等比数列求和, 后一项仿例 1 可得.

(收稿日期: 20050828)