

# 高考数列综合应用题解题技巧探究

焦随强

(山西省运城市绛县职业中学,山西 运城 043600)

**摘 要:**在高考数学中,数列综合探究问题一直是备受关注的焦点.而数列综合探究问题要求学生能对数列的规律和特性深入研究,解决各种与数列相关的综合应用问题.因此,教师需通过探究数列的性质、规律和递推公式,助力学生灵活运用数学知识和解题技巧,从而找到解决数列综合问题的有效方法.

**关键词:**数列综合应用题;解题技巧;探究

**中图分类号:**G632

**文献标识码:**A

**文章编号:**1008-0333(2023)33-0063-03

数列的综合问题指数列知识与函数、向量、不等式等其他数学知识糅合形成的综合类题组,数列综合应用题的解决过程需要学生具备良好的数学思维和分析能力.在解题过程中,教师要观察题目的特点,深入研究高考数学数列综合问题,在课堂中引入有关数列的多面组合题型,从而帮助学生提升逻辑思维、分析问题和解决问题的能力,积累高考数列综合应用题型的解题技巧<sup>[1]</sup>.

## 1 数列与函数综合应用

数列与函数是高中数学中的重要内容,它们的综合应用涉及数学与现实世界的结合,可以帮助学生解决高考大题中的综合性探究问题,提高学生的数学思维能力和解决问题的能力.教师通过数列与函数的综合应用的教学,有助于学生更好地理解数学的实际意义和应用背景,为后续的提升与发展打下坚实的基础.

课堂中,教师可以带领学生简单回顾数列的知识应用,然后将数列与函数内容整理成例题,如:A市某集团投入资金进行生态环境的建设发展,规划旅游业,根据规划,本年度预计投入800万元,以后每年的投入将比上一年少 $\frac{1}{5}$ ,本年度当地的旅游业收

入预计为400万元,且由于该项建设对旅游业的推动作用,预计今后的旅游业收入每年都会比上一年增加 $\frac{1}{4}$ .(1)设 $n$ 年内(本年度为第一年)总投入为 $a_n$ 万元,旅游业总收入为 $b_n$ 万元,请写出 $a_n$ 和 $b_n$ 的表达式.(2)最少要经过多少年,该地旅游业的总收入才能超过总投入?教师在给出题目后,可以帮助学生简单分析题目,为学生抛砖引玉提供思维引导,教师可以指出第一年投入的是800万元,那么第二年投入的金额应该是 $800 \times (1 - \frac{1}{5})$ 万元,也就是说,第 $n$ 年,该企业投入的金额应该为 $800 \times (1 - \frac{1}{5})^{n-1}$ 万元.在教师的提示下,学生迅速反应,并计算出了 $n$ 年的投入值,回答 $n$ 年的总投入金额应该为 $a_n = 800 + 800 \times (1 - \frac{1}{5}) + \cdots + 800 \times (1 - \frac{1}{5})^{n-1} = 4000 \times [1 - (\frac{4}{5})^n]$ ,如法炮制,第一年的旅游业收入为400万元, $n$ 年的旅游业收入可以同理计算得出 $b_n = 400 + 400 \times (1 + \frac{1}{4}) + \cdots + 400 \times (1 + \frac{1}{4})^{n-1} = 1600 \times [(\frac{5}{4})^n - 1]$ .在解决第二问

**收稿日期:**2023-08-25

**作者简介:**焦随强(1984.1-),男,山西省绛县人,本科,中职讲师,从事数学教学研究.

时,教师可以询问学生的解题思路,帮助学生找到数列综合类题型的题眼.教师可以指出题目中的关键词“最少”,询问学生对“至少”“不少于”“不多于”这类词的数学反应,有学生提出这是不等式的标志,但是需要应用函数的思想解决与不等式有关的数列综合应用题.在教师的指引下,学生提出了假设法,设至少经过 $n$ 年旅游业的总收入才能超过该企业的总投入,由此也可以得出, $b_n - a_n > 0$ ,即 $1\ 600 \times [(\frac{5}{4})^n - 1] - 4\ 000 \times [1 - (\frac{4}{5})^n] > 0$ ,此时,教师需要提示学生观察函数表达式,发现其式子的复杂性和繁琐性,然后提示学生此处可以使用换元法,将复杂的式子换元成特殊符号,即令 $x = (\frac{4}{5})^n$ ,代入式子可以得到, $5x^2 - 7x + 2 > 0$ ,解上述式子可以得到, $x < \frac{2}{5}$ ,或者 $x > 1$ ,由于 $x > 1$ 不合题意所以舍去,因此得到了 $(\frac{4}{5})^n < \frac{2}{5}$ ,由此可以得出, $n \geq 5$ .在例题中,教师可以为学生找到解决数列综合性题目的特征,此题以数列与函数为主,教师可以在讲解过程中着重强调函数与数列融合部分的巧妙思维,把函数的一一对应关系与数列类比,让学生可以意识到数列也是一种特殊的函数.

## 2 数列与方程综合应用

在高考数学中,数列与方程相结合的综合类题型是学生学习的重点,两者的综合应用不仅能够培养学生缜密的逻辑思维能力和问题解决能力,还能够帮助学生更好地理解数学知识的实际应用<sup>[2]</sup>.因此,教师在课堂中,需要深入挖掘数列与方程的综合应用题,帮助学生培养数学能力,从而能更好地达到高考数学的学习和考试的要求.

数列的综合应用题组不可避免地会与方程形成关系,在课堂中,教师可以找出以数列与方程混合求解的题型,帮助学生找到解决数列与方程问题的方法,教师可以展示例题:已知 $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ , ( $n \in \mathbf{N}^+$ ),并设 $f(n)$ 为 $S_{2n+1} - S_{n+1}$ ,试确定实数 $m$ 的取值范围.教师可以在学生解题前为学生提供

一定的解题思路,指出本题考查的是依托数列形式的方程思维,解决综合问题的类型,学生通常会在 $f(n)$ 求和方面产生思维壁垒,解决本题的关键在于把 $f(n)$  ( $n \in \mathbf{N}^+$ )可以看作是 $n$ 的函数方程,此时也就可以把方程不等式的恒成立转化成其他形式,接着,根据教师的提示,有学生指出, $f(n) = \frac{1}{n+2} +$

$\frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n+1}$ ,又因为 $f(n+1) - f(n) = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} - \frac{2}{2n+4} = (\frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+4}) + (\frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+4}) > 0$ ,所以 $f(n+1) > f(n)$ ,所以 $f(n)$ 是关于 $n$ 的增函数,所以 $f(n)$ 的最小值为 $f(2) = \frac{9}{20}$ ,因为要使得一切大于1的自然数

$n$ ,所以 $f(n) > [\log_{m(m-1)}]^2 - \frac{11}{20} [\log_{m(m-1)}]^2$ 恒成

立,也就是 $\frac{9}{20} > [\log_{m(m-1)}]^2 - \frac{11}{20} [\log_{m(m-1)}]^2$ 恒成

立,由此可以解得, $m > 0, m \neq 1, m-1 > 0, m-1 \neq 1$ ,可以得到 $m > 1$ 且 $m \neq 2$ ,此时有些学生会出现晕头转向的可能,教师将几次换元的步骤用着重号标出,可以鼓励学生反映出下一步为设 $[\log_{m(m-1)}]^2 = t, t$

$> 0$ ,于是,可以得到, $\frac{9}{20} > t - \frac{11}{20}$ ,且 $t > 0$ ,所以解得,

$0 < t < 1$ ,由此可以得出 $0 < [\log_{m(m-1)}]^2 < 1$ ,解得 $m$ 的值且 $m$ 不等于2.纵观此类数列题目的解答,教师可以总结,数列的综合题和应用性问题既要求学生有坚实的基础,又需要学生有良好的分析能力,充分学会观察问题,归纳总结,猜想逆推和建立相关的数列模型,从而递推正确的模型思路.同时,还需要学生正确转化语言文字,将题目中的文字符号转化为有实际意义的数学条件,构建起题目与问题的数学关联,让数列的综合问题贯穿在整个解题过程中.

通过深入挖掘数列与方程的综合应用,教师可以在课堂中为学生打开数列学习的新思路,帮助学生找到数列学习的新途径,学生也可以培养一定的逻辑思维,并形成独特的问题意识,提高数列综合类题型探究的内驱力,加深对数学知识的理解.

### 3 数列与不等式综合应用

在高考数学中,思维进阶训练可以帮助学生培养深入思考和解决复杂问题的习惯.数列与不等式的综合应用涉及复杂的数学概念和技巧,需要教师在课堂中提供适当的引导,帮助学生提高解题效率和应对多样化考试题型综合能力,从而帮助学生形成适配高考数学要求的数学思维逻辑意识<sup>[3]</sup>.

教师在讲解数列与函数、方程的综合应用后,可以为学生进阶思维难度,将数列与不等式糅合为主的综合应用题作为课堂例题,帮助学生突破自我局限,找到数列学习的先导性,形成一定的数学思维意识和能力.教师可以给出课堂例题:已知数列 $\{a_n\}$ 满足条件: $a_1=1, a_2=r(r>0)$ ,且 $\{a_n a_{n+1}\}$ 是公比为 $q(q>0)$ 的等比数列,且设 $b_n=a_{2n-1}+a_n(n=1, 2, 3, \dots)$ ,试求出使得不等式 $a_n a_{n+1}+a_{n+1} a_{n+2}>a_{n+1} a_{n+3}(n \in \mathbf{N}^+)$ 成立的 $q$ 的取值范围,其中 $S_n=b_1+b_2+\dots+b_n$ ,求出 $b_n$ 和 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{S_n}$ .教师可以结合题目特征,与学生一同分析题意,根据数列的性质,可以列出数学表达式: $r q_{n-1}+r q_n>r q_{n+1}$ ,并结合假设

法,设 $r>0, q>0$ ,接着,教师可以请学生回答不等式的设立方法,学生正确回答出此时需要设 $q^2-q-1<0$ ,并利用求根公式解得 $q$ 的取值在二分之一减根号五与二分之一加根号五之间,且结合解题步骤的设定条件, $q$ 应该大于0,因此, $q \in (0, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$ .教师在引导讲解之后,可以鼓励学生自主探究,引导学生将不等式思维应用在数列极限思维的综合类题型中,让学生对数列的理解更加开阔.教师可以采用小组合作讨论的方式,帮助学生在理解应用类难题时放下心理压力,在一定的时间后,有学生小组汇报成果,学生小组代表提出,可以先用数学表达式翻译题目,得出 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a_{2n-1}q+a_{2n}q}{a_{2n-1}+a_{2n}}=q \neq 0, b_1=1+r \neq 0$ ,所以 $\{b_n\}$ 是首项为 $1+r$ ,公比为 $q$ 的等比数列,从而可以得到 $b_n=(1+r)q^{n-1}$ ,当 $q=1$ 时, $S_n=n(1+r)$ .该小组研究出了数列的表达式,接着,在教师的指引下,其他小组也有了一定的成果,小组代表指出,可以根据第一问的提示,扩大不等式的运用思维,联想

到极限的思想,运用极限求出临界值, $\frac{1}{S_n}$ 的极限可以

等量代换为 $\frac{1}{n(1+r)}$ 的极限,趋近于0,当 $0<q<1$

时, $S_n=(1-q^n)\frac{(1+r)}{1-q}$ ,当 $q>1$ 时, $1/S_n$ 的极限趋

近于0,所以可以推导得出, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{S_n}=\frac{1-q}{1+r}(0<q<$

$1), \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{S_n}=0, (q \geq 1)$ .在数列与不等式的主要融

合中,教师需要讲解不等式的概念,帮助学生学会转变题意,用合适的数学逻辑语言翻译单一的文字题目,让数列的思想应用与不等式、极限的思想糅合,找到三者相互转化的状态与策略,从而突破数列综合类大题的难关,找到解决数列进阶类题型的关键点,提升学生在数列综合性应用题上的思维灵敏度和准确度,提高寻找数列综合题切入点的效率.

通过思维进阶训练,帮助学生理解数列与函数、方程、不等式的综合应用,熟悉数列与多种数学思维的融合方式,并在具体题目中模拟演练,找到不同类型综合应用题的突破点,形成一定的解决综合类题型的思维意识.以此帮助学生发展数列学习的能力,突破现有的瓶颈,从而在数列综合类型的题目的解答中如鱼得水.

综上所述,高考数列综合应用题解题的关键在于掌握数列的定义和性质,教师需要带领学生识别数列类型,寻找规律,应用相应的公式和技巧,同时确保学生对题意和解题思路的准确理解.这有利于学生深入地理解题目要求,寻找数列规律,灵活运用数学知识.同时,学生也可以深刻认识到实践和练习的重要性,不断地尝试和思考,从而更好地应对高考数列综合应用题的挑战.

#### 参考文献:

- [1] 孙娅南.例谈数列问题的综合应用[J].中学数理化(高考数学),2022(10):16-17.
- [2] 江苏省苏州中学数学教研组.数列的综合应用[J].新世纪智能,2020(22):27-28.
- [3] 钱冬明.谈高中数学中数列的综合应用问题[J].理科考试研究,2015,22(23):1-2.

[责任编辑:李 璟]