



分割法求解圆锥曲线中的四边形面积最值问题

■ 苏艺伟

摘要: 在圆锥曲线的学习中,经常碰到诸如直线与圆锥曲线相交,求解四边形面积最值问题.此类题型求解方法多种,其中不乏一些解题技巧.然而在众多解法中通性通法仍然是最好的解法.采用分割法求解是通性通法,直观自然,思路清晰.本文就此问题举例说明,以期更好地指导备考.

关键词: 四边形;面积最值;分割法

在圆锥曲线的学习中,经常碰到诸如直线与圆锥曲线相交,求解四边形面积最值问题.此类题型求解方法多种,其中不乏一些解题技巧.然而在众多解法中通性通法仍然是最好的解法.所谓通性通法是指求解一类试题最自然最本质的解法.对于此类四边形面积最值问题,其通性通法应该是将四边形分割成为若干个三角形,将四边形的面积表示成三角形的面积之和,然后借助函数求最值的方法求出四边形面积的最值.而对于其中三角形的面积,可以借助三角形面积坐标公式,也可以利用底乘以高除以2来进行计算.下面举例说明.

例1 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $A(0,5), B(-8,-3)$. C, D 是该椭圆上关于原点 O 对称的两点,且在线段 AB 右下侧,求四边形 $ABCD$ 面积的最大值.

分析: 要求四边形 $ABCD$ 面积的最大值,关键在于如何表示出四边形 $ABCD$ 的面积.采用分割法,不妨设所求面积为 S ,则 $S = S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OAD} + S_{\triangle OBC}$

解: 如图1,易求得椭圆方程为 $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$.

显然直线 CD 的斜率存在,设直线 CD 方程为 $y = kx$,其中 $k > \frac{3}{8}$.

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx, \\ \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1 \end{cases} \text{ 得 } (1 + 4k^2)x^2 - 100 = 0, \text{ 解得}$$

$$x^2 = \frac{100}{1 + 4k^2}.$$

$$\text{故 } D\left(\frac{10}{\sqrt{1 + 4k^2}}, \frac{10k}{\sqrt{1 + 4k^2}}\right), |OD| = |OC| = 10$$

$$\sqrt{\frac{1 + k^2}{1 + 4k^2}}.$$

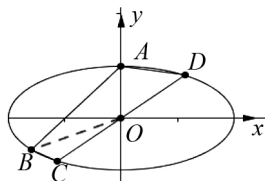


图1

不妨设所求面积为 S , 则 $S = S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OAD} + S_{\triangle OBC}$, 即 $S = 20 + S_{\triangle OAD} + S_{\triangle OBC}$.

由于点 $A(0,5)$ 到直线 $kx - y = 0$ 的距离为 $d_A =$

$$\frac{5}{\sqrt{k^2 + 1}},$$

点 $B(-8, -3)$ 到直线 $kx - y = 0$ 的距离为 $d_B =$

$$\frac{8k - 3}{\sqrt{k^2 + 1}},$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } S_{\triangle OAD} + S_{\triangle OBC} &= \frac{1}{2} |OD| d_A + \frac{1}{2} |OC| d_B \\ &= 10 \frac{4k + 1}{\sqrt{1 + 4k^2}}. \end{aligned}$$

$$\text{令 } t = 4k + 1, \text{ 则 } t > \frac{5}{2}, k = \frac{t-1}{4}, \frac{4k+1}{\sqrt{1+4k^2}} =$$

$$\frac{t}{\sqrt{\frac{t^2 - 2t + 5}{4}}} = \frac{2t}{\sqrt{t^2 - 2t + 5}} = 2 \sqrt{\frac{t^2}{t^2 - 2t + 5}} = 2$$

作者简介: 苏艺伟(1986-),男,福建龙海人,本科,中学二级教师,主要从事高中数学教学研究

基金项目: 福建教育学院2017年基础教育研究立项课题《微专题视角下的高三数学复习策略研究》(JYYB—2017001)的阶段性研究成果

2018年第3期



$$\sqrt{\frac{1}{1 - \frac{2}{t} + \frac{5}{t^2}}}, 1 - \frac{2}{t} + \frac{5}{t^2} = 5\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{4}{5}, \text{当} \frac{1}{t} = \frac{1}{5} \text{ 时有最小值} \frac{4}{5}, \text{故} \frac{4k+1}{\sqrt{1+4k^2}} \text{ 有最大值} \sqrt{5}.$$

因此 S 的最大值为 $20 + 10\sqrt{5}$.

评析: 将四边形分割成三个小三角形, 即 $S = S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OAD} + S_{\triangle OBC}$. 其中三角形 OAB 的面积借助面积坐标公式马上可求, 三角形 OAD 和 OBC 的面积利用底乘以高除以 2 进行计算, 同时抓住 $|OC| = |OD|$ 这个重要特征, 求出面积的最大值.

例 2 已知椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, 左焦点为 F_1 , 双曲线 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$. 过 F_1 作椭圆的不垂直于 y 轴的弦 AB , M 为 AB 的中点, 直线 OM 与双曲线交于 P, Q 两点. 求四边形 $APBQ$ 面积的最小值.

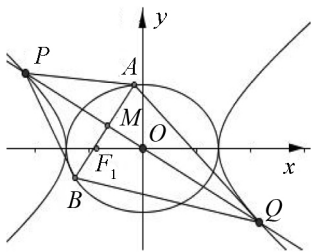


图 2

分析: 要求四边形 $APBQ$ 面积的最小值, 关键还是准确表示出该四边形的面积. 采用分割法, 不妨设所求面积为 S , 则 $S = S_{\triangle PAB} + S_{\triangle QAB}$.

解: 如图 2, 设直线 AB 方程为 $x = my - 1, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{由} \begin{cases} x = my - 1, \\ x^2 + 2y^2 = 2. \end{cases} \text{得} (2 + m^2)y^2 - 2my - 1 = 0, \text{则}$$

$$y_1 + y_2 = \frac{2m}{m^2 + 2}, y_1 y_2 = \frac{-1}{m^2 + 2}, M\left(\frac{-2}{m^2 + 2}, \frac{m}{m^2 + 2}\right),$$

直线 OM 方程为 $y = -\frac{m}{2}x$. 显然 $|AB| = \sqrt{1 + m^2}$

$$|y_1 - y_2| = 2\sqrt{2} \frac{1 + m^2}{2 + m^2}.$$

$$\text{由} \begin{cases} y = -\frac{m}{2}x, \\ x^2 - 2y^2 = 2. \end{cases} \text{得} P\left(\frac{-2}{\sqrt{2 - m^2}}, \frac{m}{\sqrt{2 - m^2}}\right),$$

$$Q\left(\frac{2}{\sqrt{2 - m^2}}, \frac{-m}{\sqrt{2 - m^2}}\right).$$

不妨设所求面积为 S , 则 $S = S_{\triangle PAB} + S_{\triangle QAB}$.

$$\text{由于点 } P \text{ 到直线 } AB \text{ 的距离为 } d_p = \frac{\left| \frac{-2}{\sqrt{2 - m^2}} - \frac{m^2}{\sqrt{2 - m^2}} + 1 \right|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

$$= \frac{\frac{2}{\sqrt{2 - m^2}} + \frac{m^2}{\sqrt{2 - m^2}} - 1}{\sqrt{m^2 + 1}}.$$

点 Q 到直线 AB 的距离为 $d_q =$

$$\frac{\left| \frac{2}{\sqrt{2 - m^2}} + \frac{m^2}{\sqrt{2 - m^2}} + 1 \right|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

$$= \frac{\frac{2}{\sqrt{2 - m^2}} + \frac{m^2}{\sqrt{2 - m^2}} + 1}{\sqrt{m^2 + 1}}.$$

$$\text{所以 } S = S_{\triangle PAB} + S_{\triangle QAB} = \frac{1}{2} |AB| d_p + \frac{1}{2} |AB|$$

$$d_q = \frac{1}{2} |AB| (d_p + d_q) = 2\sqrt{2} \sqrt{\frac{1 + m^2}{2 - m^2}}.$$

$$\text{令 } t = 2 - m^2, \text{ 则 } 0 < t \leq 2, \text{ 故 } S = 2\sqrt{2} \sqrt{\frac{3}{t} - 1},$$

显然当 $t = 2$ 时, 面积有最小值为 2.

评析: 将四边形分割成两个小三角形, 即 $S = S_{\triangle PAB} + S_{\triangle QAB}$. 三角形 PAB 和 QAB 的面积利用底乘以高除以 2 进行计算, 同时抓住有公共底边这个重要特征, 求出面积的最小值.

例 3 已知椭圆方程为 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$, A, B 为上顶点和右顶点. 过原点 O 的直线与线段 AB 交于点 D , 与椭圆交于 E, F 两点, 求四边形 $AEBF$ 面积的最大值.

分析: 如图 3, 本题的关键在于如何准确表示出四边形 $AEBF$ 的面积. 不妨设所求面积为 S , 显然 $A(0, 2), B(\sqrt{3}, 0)$, $|AB| = \sqrt{7}$, AB 方程为 $2x + \sqrt{3}y - 2\sqrt{3} = 0$, 点 E 和 F 关于原点对称, $|OE| = |OF|$, $|EF| = 2|OE|$, 采用分割法求解.

思路 1: $S = S_{\triangle EAB} + S_{\triangle FAB}$, 设点 E 和 F 到直线 AB 的距离分别为 d_1, d_2 , 则

$$S = S_{\triangle EAB} + S_{\triangle FAB} = \frac{\sqrt{7}}{2} (d_1 + d_2).$$

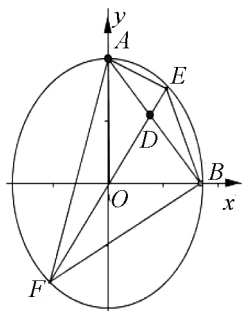


图3

设直线 EF 的方程为 $y = kx, k > 0$.

$$\text{由} \begin{cases} y = kx, \\ \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1. \end{cases} \text{得} (4 + 3k^2)x^2 - 12 = 0, \text{解得} x^2 =$$

$$= \frac{12}{4 + 3k^2}.$$

$$\text{故 } E\left(\sqrt{\frac{12}{4 + 3k^2}},\right.$$

$$\left. k\sqrt{\frac{12}{4 + 3k^2}}\right), F\left(-\sqrt{\frac{12}{4 + 3k^2}}, -k\sqrt{\frac{12}{4 + 3k^2}}\right).$$

点 E 到直线 AB 的距离

$$d_1 = \frac{|2\sqrt{\frac{12}{4 + 3k^2}} + \sqrt{3}k\sqrt{\frac{12}{4 + 3k^2}} - 2\sqrt{3}|}{\sqrt{7}},$$

点 F 到直线 AB 的距离

$$d_2 = \frac{|-2\sqrt{\frac{12}{4 + 3k^2}} - \sqrt{3}k\sqrt{\frac{12}{4 + 3k^2}} - 2\sqrt{3}|}{\sqrt{7}}.$$

因为点 E 在直线 AB 的上方, 点 F 在直线 AB 的下方, 所以

$$d_1 = \frac{2\sqrt{\frac{12}{4 + 3k^2}} + \sqrt{3}k\sqrt{\frac{12}{4 + 3k^2}} - 2\sqrt{3}}{\sqrt{7}},$$

$$d_2 = \frac{2\sqrt{\frac{12}{4 + 3k^2}} + \sqrt{3}k\sqrt{\frac{12}{4 + 3k^2}} + 2\sqrt{3}}{\sqrt{7}},$$

$$\text{故 } d_1 + d_2 = \frac{4\sqrt{\frac{12}{4 + 3k^2}} + 2\sqrt{3}k\sqrt{\frac{12}{4 + 3k^2}}}{\sqrt{7}} =$$

$$\frac{2\sqrt{12}}{\sqrt{7}}\left(\frac{2}{\sqrt{4 + 3k^2}} + \frac{\sqrt{3}k}{\sqrt{4 + 3k^2}}\right).$$

$$\text{因此 } S = S_{\triangle EAB} + S_{\triangle FAB} = \frac{7}{2}(d_1 + d_2) = 2$$

$$\sqrt{3}\left(\frac{2}{\sqrt{4 + 3k^2}} + \frac{\sqrt{3}k}{\sqrt{4 + 3k^2}}\right).$$

思路2: $S = S_{\triangle AEF} + S_{\triangle BEF}$, 设点 A 和 B 到直线 EF 的距离分别为 d_1, d_2 , 则

$$S = S_{\triangle AEF} + S_{\triangle BEF} = \frac{1}{2}|EF|(d_1 + d_2).$$

设直线 EF 的方程为 $y = kx, k > 0$.

$$\text{由} \begin{cases} y = kx, \\ \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \text{得} (4 + 3k^2)x^2 - 12 = 0, \text{解得} x^2 =$$

$$\frac{12}{4 + 3k^2}, y^2 = \frac{12k^2}{4 + 3k^2}.$$

$$\text{故 } |EF| = 2|OE| = 2\sqrt{\frac{12}{4 + 3k^2} + \frac{12k^2}{4 + 3k^2}} = 4\sqrt{3}$$

$$\sqrt{\frac{1 + k^2}{4 + 3k^2}}.$$

$$\text{点 } A(0, 2) \text{ 到直线 } EF \text{ 的距离 } d_1 = \frac{2}{\sqrt{k^2 + 1}},$$

$$\text{点 } B(\sqrt{3}, 0) \text{ 到直线 } EF \text{ 的距离 } d_2 = \frac{\sqrt{3}k}{\sqrt{k^2 + 1}},$$

$$\text{故 } d_1 + d_2 = \frac{2 + \sqrt{3}k}{\sqrt{k^2 + 1}}.$$

$$\text{因此 } S = S_{\triangle AEF} + S_{\triangle BEF} = \frac{1}{2}|EF|(d_1 + d_2) =$$

$$\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \sqrt{\frac{1 + k^2}{4 + 3k^2}} \cdot \frac{2 + \sqrt{3}k}{\sqrt{k^2 + 1}} = 2\sqrt{3} \frac{2 + \sqrt{3}k}{\sqrt{4 + 3k^2}}.$$

上述两种思路都是将四边形 $AEBF$ 分割成两个小三角形, 然后借助三角形面积公式底乘以高的一半来表示出三角形的面积, 从而将四边形 $AEBF$ 的面积表示成关于直线 EF 的斜率 k 的一元函数模型, 即 $S = 2\sqrt{3} \frac{2 + \sqrt{3}k}{\sqrt{4 + 3k^2}} (k > 0)$.

$$\text{令 } t = 2 + \sqrt{3}k, t > 2. \text{ 则 } k = \frac{t - 2}{\sqrt{3}}, \sqrt{4 + 3k^2} =$$

$$\sqrt{t^2 - 4t + 8}, \text{ 因此 } \frac{2 + \sqrt{3}k}{\sqrt{4 + 3k^2}} \text{ 化为 } \frac{t}{\sqrt{t^2 - 4t + 8}}.$$

$$\text{又 } \frac{t}{\sqrt{t^2 - 4t + 8}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{8}{t^2} - \frac{4}{t} + 1}} =$$



$$\frac{1}{\sqrt{8(\frac{1}{t} - \frac{1}{4})^2 + \frac{1}{2}}} \leq \sqrt{2}, \text{ 当且仅当 } t = 4, \text{ 即 } 2 + \sqrt{3}k = 4, \text{ 即 } k = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ 时取等号. 故 } S = 2\sqrt{3} \frac{2 + \sqrt{3}k}{\sqrt{4 + 3k^2}} \leq 2\sqrt{6}.$$

思路3: $S = S_{\triangle AEF} + S_{\triangle BEF}$, 而 $S_{\triangle AEF} = 2S_{\triangle OAE}$, $S_{\triangle BEF} = 2S_{\triangle OBE}$, 故 $S = 2S_{\triangle OAE} + 2S_{\triangle OBE}$.

设 $E(x, y)$, 其中 $x > 0, y > 0$.

则 $\vec{OA} = (0, 2), \vec{OB} = (\sqrt{3}, 0), \vec{OE} = (x, y)$, 根据三角形面积坐标公式有

$$S_{\triangle OAE} = \frac{1}{2} |0 \cdot y - 2 \cdot x| = x, S_{\triangle OBE} = \frac{1}{2} |x \cdot 0 - \sqrt{3} \cdot y| = \frac{\sqrt{3}}{2} y.$$

$$\text{故 } S = 2S_{\triangle OAE} + 2S_{\triangle OBE} = 2x + \sqrt{3}y.$$

上述思路是将四边形 $AEBF$ 分割成两个小三角形, 然后借助三角形面积坐标来表示出三角形的面积, 从而将四边形 $AEBF$ 的面积表示成关于点 E 的坐标 (x, y) 的二元函数模型, 即 $S = 2x + \sqrt{3}y$.

$$\text{由 } \begin{cases} S = 2x + \sqrt{3}y, \\ \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \text{ 得 } 8x^2 - 4Sx + S^2 - 12 = 0.$$

$$\text{令 } \Delta \geq 0 \text{ 得 } S \leq 2\sqrt{6}.$$

$$\text{当 } S = 2\sqrt{6} \text{ 时, 有 } 2x^2 - 2\sqrt{6}x + 3 = 0, \text{ 解得 } x = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\text{代入 } \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ 得 } y = \sqrt{2}.$$

$$\text{即 } E(\frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{2}). \text{ 此时直线 } EF \text{ 的斜率 } k = \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

评析: 本道试题的三种思路本质上是一样的, 都是将四边形分割成两个小三角形. 但是分割的方式不一样, 其求解过程也稍有差异.

例4 设圆 $x^2 + y^2 + 2x - 15 = 0$ 的圆心为 A , 直线 l 过点 $B(1, 0)$ 且与 x 轴不重合. l 交圆 A 于 C, D 两点, 过 B 作 AC 的平行线交 AD 于点 E .

(1) 证明 $|EA| + |EB|$ 为定值, 并写出点 E 的轨迹方程. ($\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$)

(2) 设点 E 的轨迹为曲线 C_1 , 直线 l 交 C_1 于 M, N 两点. 过 B 且与 l 垂直的直线与圆 A 交于 P, Q 两点. 求

四边形 $MPNQ$ 的面积取值范围.

分析: 四边形 $MPNQ$ 的面积可以分割成为三角形 PMN 与三角形 QMN 的面积之和, 即

$$S = S_{\triangle PMN} + S_{\triangle QMN}. \text{ 又 } S_{\triangle PMN} = \frac{1}{2} |MN| |PB|, S_{\triangle QMN} = \frac{1}{2} |MN| |QB|, \text{ 所以 } S = \frac{1}{2} |MN| |PQ|.$$

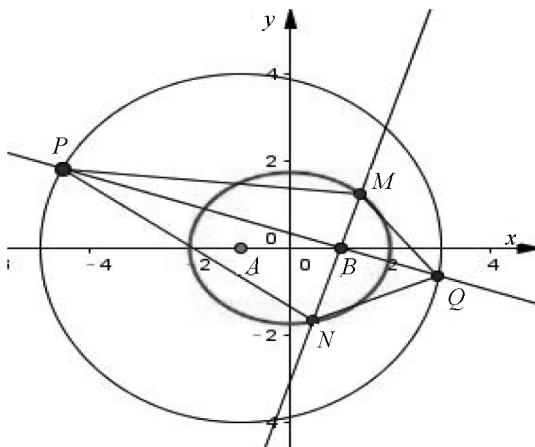


图4

解: 如图4所示, 由于直线 l 过点 $B(1, 0)$ 且与 x 轴不重合, 故可设直线 l 方程为 $x = my + 1$, 则直线 PQ 的方程为 $y = -m(x - 1)$.

$$\text{由 } \begin{cases} x = my + 1, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases} \text{ 得 } (3m^2 + 4)y^2 + 6my - 9 = 0.$$

$$\text{设 } M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), \text{ 则 } \begin{cases} y_1 + y_2 = -\frac{6m}{3m^2 + 4}, \\ y_1 \cdot y_2 = -\frac{9}{3m^2 + 4} \end{cases}$$

$$|MN| = \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}} \cdot \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2} = \sqrt{1 + m^2} \cdot \sqrt{(-\frac{6m}{3m^2 + 4})^2 + \frac{36}{3m^2 + 4}} = 12 \frac{m^2 + 1}{3m^2 + 4}.$$

由第一步知圆 A 的圆心为 $A(-1, 0)$, 半径为 4.

圆心 $A(-1, 0)$ 到直线 $PQ: mx + y - m = 0$ 的距离为 $d = \frac{|2m|}{\sqrt{m^2 + 1}},$

$$\text{则 } |PQ| = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 4\sqrt{\frac{3m^2 + 4}{m^2 + 1}}.$$

因此四边形 $MPNQ$ 的面积 $S = \frac{1}{2} |MN| \cdot |PQ| =$



$$\frac{1}{2} \cdot 12 \frac{m^2+1}{3m^2+4} \cdot 4 \sqrt{\frac{3m^2+4}{m^2+1}} = 24 \sqrt{\frac{m^2+1}{3m^2+4}}.$$

$$\text{记 } f(m) = \frac{m^2+1}{3m^2+4}, m \in \mathbf{R}.$$

$$f(m) = \frac{m^2+1}{3m^2+4} = \frac{m^2+1}{3(m^2+1)+1} = \frac{1}{3+\frac{1}{m^2+1}},$$

由 $m^2 \geq 0$ 得 $m^2+1 \geq 1$, 即 $\frac{1}{m^2+1} \in (0, 1]$, $3+\frac{1}{m^2+1}$

$$\in (3, 4], \frac{1}{3+\frac{1}{m^2+1}} \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{3}), \text{ 即 } f(m) \in$$

$$[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}).$$

综上, $S \in [12, 8\sqrt{3}]$.

评析: 对于任意的四边形如果两条对角线互相垂直, 则根据分割法的思路可以得到其面积等于两条对角线的乘积一半.

例 5 设 O 是坐标原点, 动点 M 在椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 上, 过 M 作 x 轴的垂线, 垂足为 N . 点 P 满足 $\overrightarrow{NP} = \sqrt{2} \overrightarrow{NM}$. 设点 Q 在直线 $x = -3$ 上, 且 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ} = 1$. 过点 P 且垂直于 OQ 的直线 l 过椭圆的左焦点 F . 求四边形 $OPQF$ 的面积的最小值.

分析: 四边形 $OPQF$ 的面积可以分割成为三角形 POQ 与三角形 F_1OQ 的面积之和, 即 $S = S_{\triangle POQ} + S_{\triangle F_1OQ}$. 又 $PF_1 \perp OQ$, 所以 $S = \frac{1}{2} |PF_1| |OQ|$.

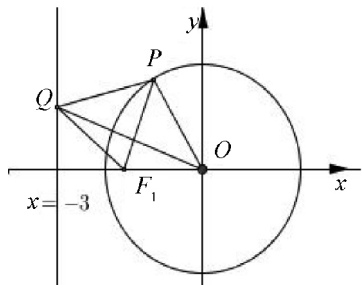


图 5

解: 由已知易得点 P 的轨迹方程为 $x^2 + y^2 = 2$, 如图 5 所示. 设 $Q(-3, t)$, $P(x_0, y_0)$, $F_1(-1, 0)$, 其中 $x_0^2 + y_0^2 = 2$.

$$\text{由 } \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ} = 1 \text{ 得 } -3x_0 + y_0 t - x_0^2 - y_0^2 = 1, \text{ 即 } t =$$

$$\frac{3+3x_0}{y_0}.$$

$$|PF_1| = \sqrt{(x_0+1)^2 + y_0^2} = \sqrt{2x_0+3}, |OQ| =$$

$$\sqrt{9+t^2} = 3 \sqrt{\frac{2x_0+3}{2-x_0^2}}.$$

$$\text{因此 } S = \frac{1}{2} |PF_1| |OQ| = \frac{3}{2} \frac{2x_0+3}{\sqrt{2-x_0^2}}.$$

由于 $P(x_0, y_0)$ 在圆 $x^2 + y^2 = 2$ (扣除与 x 轴的交点), 结合对称性可设 $x_0 = \sqrt{2} \cos \alpha, 0 < \alpha < \pi$,

$$\text{故 } S = \frac{3}{2} \frac{2\sqrt{2} \cos \alpha + 3}{\sqrt{2} \sin \alpha}.$$

$$\text{又 } S' = \frac{-3}{4} \cdot \frac{3\sqrt{2} \cos \alpha + 4}{\sin^2 \alpha}, \text{ 令 } S' = 0, \text{ 得 } \cos \alpha =$$

$$-\frac{2\sqrt{2}}{3}, \sin \alpha = \frac{1}{3}. \text{ 此时四边形 } OPQF \text{ 的面积的最小值}$$

$$\text{为 } \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

评析: 本题对于四边形面积的算法与例 4 一致, 由于观察到两对角线互相垂直, 所以根据分割法的思路可以得到其面积等于两条对角线的乘积一半^[1].

不难发现, 采用分割法求解圆锥曲线中的四边形面积最值问题, 思路自然, 直观清晰. 在实际解题中, 要注意观察图形特征, 选择恰当的分割方式, 以期达到解题效果的最优化.

参考文献:

[1] 阮飞. 弦问题背景下的动直线过定点问题的研究历程[J]. 数学通讯, 2017(8): 51-55.

[福建省龙海第一中学新校区(363100)]