



利用数列递推关系解决概率问题

马靖敏

(吉林省白城市第四中学)

数列和概率是高中数学的两大版块,看似独立,实则很多概率问题的解决离不开数列模型的应用.对于一些复杂的概率问题,后一步的概率与前一步或前两步有关,通过建立概率的递推关系,利用递推关系式构造等比数列,这样复杂的概率问题就可以迎刃而解.概率中的递推关系一般有两种形式,本文将这两种题型的解题思路和解答过程加以归纳总结,供读者参考.

1 根据递推关系 $a_n = ka_{n-1} + b$ 构造等比数列 $\{a_n + \frac{b}{k-1}\} (k \neq 1, k \neq 0, n \geq 2)$

对于递推关系为 $a_n = ka_{n-1} + b$ (k, b 均为常数,且 $k \neq 1, k \neq 0$), 设 $a_n + m = k(a_{n-1} + m)$, 则 $b = (k-1)m, m = \frac{b}{k-1}$, 可得数列 $\{a_n + \frac{b}{k-1}\}$ 是公比为 k 的等比数列, 再结合 a_1 可求得 $\{a_n\}$ 的通项公式.

 **例 1** 足球是一项大众喜爱的运动.校足球队中的甲、乙、丙、丁四名球员将进行传球训练,第 1 次由甲将球传出,每次传球时,传球者都等可能地将球传给另外三个人中的任何一人,如此不停地传下去,且假定每次传球都能被接到.记开始传球的人为第 1 次触球者,第 n 次触球者是甲的概率记为 P_n , 即 $P_1 = 1$.

(1) 求 P_3 ;

(2) 证明: 数列 $\{P_n - \frac{1}{4}\}$ 为等比数列, 并判断第 19 次与第 20 次触球者是甲的概率的大小.

 **解析** (1) $P_3 = \frac{1}{3}$ (求解过程略).

(2) 第 n 次触球者是甲的概率记为 P_n , 则当 $n \geq 2$ 时, 第 $n-1$ 次触球者是甲的概率为 P_{n-1} , 不是甲的概率为 $1 - P_{n-1}$, 则

$$P_n = P_{n-1} \cdot 0 + (1 - P_{n-1}) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(1 - P_{n-1}),$$

$$\text{从而 } P_n - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}(P_{n-1} - \frac{1}{4}).$$

又 $P_1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, 所以 $\{P_n - \frac{1}{4}\}$ 是以 $\frac{3}{4}$ 为首项、

$-\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列, 即

$$P_n = \frac{3}{4} \times (-\frac{1}{3})^{n-1} + \frac{1}{4},$$

所以

$$P_{19} = \frac{3}{4} \times (-\frac{1}{3})^{18} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4},$$

$$P_{20} = \frac{3}{4} \times (-\frac{1}{3})^{19} + \frac{1}{4} < \frac{1}{4},$$

从而 $P_{19} > P_{20}$, 故第 19 次触球者是甲的概率大.

 **点评** 在探究第 n 次概率 P_n 和第 $n-1$ 次概率 P_{n-1} 之间的关系时, 其本质是全概率公式. 记“第 $n-1$ 次触球者是甲”为事件 A , “第 n 次触球者是甲”为事件 B , 由题知 $P(A) = P_{n-1}, P(B) = P_n$, $P(B|A) = 0, P(B|\bar{A}) = \frac{1}{3}$, 利用全概率公式

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}),$$

$$\text{得 } P_n = P_{n-1} \cdot 0 + (1 - P_{n-1}) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(1 - P_{n-1}).$$

变式 某情报站有 A, B, C, D, E 五种互不相同的密码, 每周使用其中的一种密码, 且每周都是从上周未使用的四种密码中等可能地随机选用一种. 设第一周使用 A 密码, P_k 表示第 k 周使用 A 密码的概率.

(1) 求 P_1, P_2, P_3, P_4 ;

(2) 求证: $\{P_k - \frac{1}{5}\}$ 为等比数列, 并求 P_k .

 **解析** (1) $P_1 = 1, P_2 = 0, P_3 = \frac{1}{4}, P_4 = (1 - P_3) \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$.

(2) 第 k 周使用 A 密码的概率为 P_k , 则第 k 周不使用 A 密码的概率为 $1 - P_k$, 故 $P_{k+1} = \frac{1}{4}(1 - P_k)$, 即 $P_{k+1} - \frac{1}{5} = -\frac{1}{4}(P_k - \frac{1}{5})$, 故 $\{P_k - \frac{1}{5}\}$ 为等比数列且 $P_1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$, 公比为 $-\frac{1}{4}$, 即 $P_k - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \times$



$(-\frac{1}{4})^{k-1}$, 故 $P_k = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \times (-\frac{1}{4})^{k-1}$.

2 根据递推关系 $a_{n+1} = pa_n + qa_{n-1}$ 构造等比数列 $\{a_n - a_{n-1}\}$ ($p+q=1, p \neq 0, q \neq 0, n \geq 2$)

$a_{n+1} = pa_n + qa_{n-1}$ 为二阶线性递推式, 当 $p+q=1$ 时, 可构造等比数列 $\{a_n - a_{n-1}\}$. 设 $a_{n+1} - a_n = \lambda(a_n - a_{n-1})$, 则 $\lambda+1=p, -\lambda=q$, 可得出数列 $\{a_n - a_{n-1}\}$ 是以 $-q$ 为公比的等比数列, 结合 a_1, a_2 , 再利用累加法可求得 $\{a_n\}$ 的通项公式.

例 2 为激发学生学习热情, 某中学举办知识竞赛活动, 每个人随机抽取八个问题依次回答, 回答每个问题相互独立. 若答对一题可以上升两个等级, 回答错误可以上升一个等级, 最后哪位学生的等级高即可获胜. 学生甲答对每个问题的概率为 $\frac{1}{3}$, 答错的概率为 $\frac{2}{3}$. 设在第 i 个等级的概率为 P_i .

(1) 求 P_1, P_2, P_3 ;

(2) 甲在回答过程中出现在第 i ($i \geq 2$) 个等级的概率为 P_i , 证明: $\{P_i - P_{i-1}\}$ 为等比数列.

解析 (1) $P_1 = \frac{2}{3}, P_2 = \frac{7}{9}, P_3 = \frac{20}{27}$ (求解过程略).

(2) 当 $i \geq 2$ 时, 处于第 $i+1$ 个等级有两种情况:

由第 i 个等级到第 $i+1$ 个等级, 其概率为 $\frac{2}{3}P_i$;

由第 $i-1$ 等级到第 $i+1$ 等级, 其概率为 $\frac{1}{3}P_{i-1}$, 则有

$P_{i+1} = \frac{2}{3}P_i + \frac{1}{3}P_{i-1}$, 所以 $P_{i+1} - P_i = -\frac{1}{3}(P_i - P_{i-1})$, 由(1)知 $P_2 - P_1$ 不为 0, 所以数列 $\{P_i - P_{i-1}\}$ 为等比数列.

点评 求解第(2)问的关键在于寻找 P_{i+1} 与 P_i, P_{i-1} 的关系式, 即 $P_{i+1} = \frac{2}{3}P_i + \frac{1}{3}P_{i-1}$ ($i \geq 2$), 进而根据等比数列的定义证明.

变式 某公司年会推出一档闯关活动, 闯关成功将获得神秘大奖, 规则如下: 在方格图上标有第 0 格、第 1 格、第 2 格……第 30 格, 共 31 个方格. 棋子开始在第 0 格, 然后掷一枚均匀的硬币 (已知硬币出现正、反面的概率都是 $\frac{1}{2}$). 若掷出正面, 将棋子向前移动一格, 若掷出反面, 则将棋子向前移动两格. 重复多次, 若这枚棋子最终停在第 29 格, 则认为“闯关成功”; 若

这枚棋子最终停在第 30 格, 则认为“闯关失败”. 设棋子移到第 n 格的概率为 P_n , 若某员工参与闯关活动, 试比较闯关成功和失败的概率, 并说明理由.

解析 棋子开始在第 0 格为必然事件, $P_0 = 1$. 第一次掷硬币出现正面, 棋子移到第 1 格, 其概率为 $P_1 = \frac{1}{2}$. 棋子移到第 n ($2 \leq n \leq 29$) 格的情况是下列两种, 而且也只有两种: 棋子先到第 $n-2$ 格, 又掷出反面, 其概率为 $\frac{1}{2}P_{n-2}$; 棋子先到第 $n-1$ 格, 又掷出正面, 其概率为 $\frac{1}{2}P_{n-1}$, 所以 $P_n = \frac{1}{2}P_{n-2} + \frac{1}{2}P_{n-1}$, 即 $P_n - P_{n-1} = -\frac{1}{2}(P_{n-1} - P_{n-2})$, 且 $P_1 - P_0 = -\frac{1}{2}$, 所以当 $1 \leq n \leq 29$ 时, 数列 $\{P_n - P_{n-1}\}$ 是首项为 $-\frac{1}{2}$, 公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列, 则

$$P_1 - P_0 = -\frac{1}{2}, P_2 - P_1 = (-\frac{1}{2})^2,$$

$$P_3 - P_2 = (-\frac{1}{2})^3, \dots, P_n - P_{n-1} = (-\frac{1}{2})^n,$$

累加得

$$P_n - P_0 = (-\frac{1}{2}) + (-\frac{1}{2})^2 + \dots + (-\frac{1}{2})^n,$$

所以

$$P_n = \frac{2}{3}[1 - (-\frac{1}{2})^{n+1}] (n=0, 1, 2, \dots, 29),$$

故闯关成功 (即这枚棋子最终停在第 29 格) 的概率为

$$P_{29} = \frac{2}{3}[1 - (-\frac{1}{2})^{30}] = \frac{2}{3}[1 - (\frac{1}{2})^{30}],$$

闯关失败 (即这枚棋子最终停在第 30 格) 的概率为

$$P_{30} = \frac{1}{2}P_{29} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}[1 - (-\frac{1}{2})^{29}] = \frac{1}{3}[1 + (\frac{1}{2})^{29}],$$

$$P_{29} - P_{30} = \frac{1}{3}[1 - (\frac{1}{2})^{28}] > 0,$$

所以员工闯关成功的概率大于闯关失败的概率.

数列与概率的交会是数学中的热点问题, 综合性强、知识面广, 属于难点题型. 求解这类问题, 需要学生能够从文字中准确提取有效信息, 建立数列递推关系式, 根据递推关系式的不同形式, 构造不同的等比数列, 将概率问题转化为数列问题.

(完)