珠联璧合　相得益彰

——例析以数列递推关系为载体的交汇问题

安徽省枞阳县会官中学　(246740)　朱贤良

数列的递推关系问题,是中学数学中一种十分常见的问题,其思想内涵丰富,具有一定的抽象性与综合性、很强的逻辑性和灵活性. 新课标形势下,把递推数列的探求设置在创新背景中,既不失考查重点,也赋予知识新内涵,体现知识的价值,不失为一种两全其美的方式. 因此,在高考、自主招生及竞赛中,经常可以看到以数列递推关系为载体的交汇问题,这已成为了近几年创新题型的新亮点,值得细细体会. 本文整理几类这样的交汇问题进行剖析,与读者共赏.

1　函数、导数问题中的递推关系

例 1　定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$,且 $f(1)=2$,则 $f(3)=$ ____,$f(-3)=$ ____.

分析:抽象函数中常用赋值法:

令 $x=y=0$,则 $f(0+0)=f(0)+f(0)+0\Rightarrow f(0)=0$.

令 $x=n,y=1$,则 $f(n+1)=f(n)+f(1)+2n=f(n)+2+2n$. 由此递推关系,得 $f(2)=f(1)+4=6$,$f(3)=f(2)+6=12$.

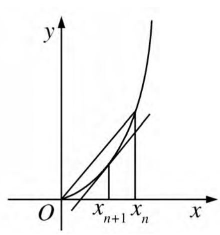
令 $x=3,y=-3$,则 $f(0)=f(3)+f(-3)-18\Rightarrow f(-3)=6$.

评注:本题抽象函数的性质中蕴含着递推关系 $f(n+1)=f(n)+2+2n$,由此可以求出 $f(n)$ 的表达式,读者不妨一试.

例 2　已知函数 $f(x)=x^3+x^2$,数列 $\{x_n\}(x_n>0)$ 的第一项 $x_1=1$,以后各项按如下方式取定:曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_{n+1},f(x_{n+1}))$ 处的切线与经过 $(0,0)$ 和 $(x_n,f(x_n))$ 两点的直线平行. 求证:当 $n\in N^*$ 时,

(1) ${x_n}^2+x_n=3x_{n+1}^2+2x_{n+1}$;

(2) $(\frac{1}{2})^{n-1}\leq x_n\leq(\frac{1}{2})^{n-2}$.



分析:　(1) $f'(x)=3x^2+2x\Rightarrow f'(x_{n+1})=3x_{n+1}^2+2x_{n+1}$.

由题知,$f'(x_{n+1})=\dfrac{f(x_n)}{x_n}$,

即 $3x_{n+1}^2+2x_{n+1}=x_n^2+x_n$.

(2) 先证:$x_n\geq(\frac{1}{2})^{n-1}$

由(1)知,$x_n^2+x_n=3x_{n+1}^2+2x_{n+1}<4x_{n+1}^2+2x_{n+1}=(2x_{n+1})^2+2x_{n+1}$,而函数 $h(x)=x^2+x$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增,故 $x_n<2x_{n+1}\Rightarrow\dfrac{x_{n+1}}{x_n}>\dfrac{1}{2}$.

当 $n\geq2$ 时,$x_n=\dfrac{x_n}{x_{n-1}}\cdots\dfrac{x_3}{x_2}\cdot\dfrac{x_2}{x_1}\cdot x_1>(\dfrac{1}{2})^{n-1}$;当 $n=1$ 时,$x_1=1=(\dfrac{1}{2})^0$.

即 $x_n\geq(\dfrac{1}{2})^{n-1}$.

再证 $x_n\leq(\dfrac{1}{2})^{n-2}$:

因为 $x_n^2+x_n=3x_{n+1}^2+2x_{n+1}>2x_{n+1}^2+2x_{n+1}=2(x_{n+1}^2+x_{n+1})$,故 $\dfrac{x_{n+1}^2+x_{n+1}}{x_n^2+x_n}<\dfrac{1}{2}$.

当 $n\geq2$ 时,$x_n<x_n^2+x_n=\dfrac{x_n^2+x_n}{x_{n-1}^2+x_{n-1}}\cdots\dfrac{x_3^2+x_3}{x_2^2+x_2}\cdot\dfrac{x_2^2+x_2}{x_1^2+x_1}\cdot(x_1^2+x_1)<(\dfrac{1}{2})^{n-1}\cdot2=(\dfrac{1}{2})^{n-2}$;当 $n=1$ 时,$x_1=1<(\dfrac{1}{2})^{1-2}$.

即 $x_n<(\dfrac{1}{2})^{n-2}\Rightarrow x_n\leq(\dfrac{1}{2})^{n-2}$.

综上所述,$(\dfrac{1}{2})^{n-1}\leq x_n\leq(\dfrac{1}{2})^{n-2}$.

评注:x_n 与 x_{n+1} 间的关系用函数图象的切线与割线平行表现出来,顺着这种递推关系放缩,第(2)得解.

2　巧构数列递推关系计数

例 3　上一个 10 级的台阶,若每步可上一级或两级,求所有不同上法的总数.

分析:记上 n 级台阶的不同上法有 a_n 种,则 $a_1=1,a_2=2$.

若第一步上一级台阶,则剩下的 $n-1$ 级台阶的上法有 a_{n-1} 种;若第一步上两级台阶,则剩下的 $n-2$ 级台阶的上法有 a_{n-2} 种. 故 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\geq3)$.

由此不断递推,得 $a_3=3,a_4=5,a_5=8,a_6=13,a_7=21,a_8=34,a_9=55,a_{10}=89$.

显然,数列 $\{a_n\}$ 是一个广义上的斐波那契数列,其通项公式的推导留给读者自己完成.

例 4　把一个圆分成 $n(n\geq2)$ 个扇形,依次记为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,每一个扇形可用红、黄、蓝三种颜色中的任一种涂色,但要求相邻扇形的颜色互不相同,问一共有多少种不同的涂色方法?

分析:设分成 n 个扇形时,涂法的总数为 $a_n(n\geq2)$,则 $a_2=A_3^2=6,a_3=A_3^3=6$.

当 $n>3$ 时,前 $n-1$ 个扇形共有 a_{n-1} 种不同涂色办法,第 n 个扇形的涂色需分两类情况讨论:

① 若扇形 A_{n-1} 与 A_1 颜色相同,则扇形 A_n 有 2 种选择,

② 若扇形 A_{n-1} 与 A_1 颜色不同,则扇形 A_n 只有 1 种选择,

因此,不同的涂色办法共有 $a_n=2a_{n-1}+a_{n-1}=3a_{n-1}(n>3)$ 种. 即 $n>3$ 时,数列 $\{a_n\}$ 是一个以 $a_3=6$ 为首项、$q=3$ 为公比的等比数列. 故 $n>3$ 时,$a_n=2\cdot 3^{n-2}$.

综上所述,不同的涂法总数为 $a_n=\begin{cases}6, n=2\\ 2\cdot 3^{n-2}, n\geq 3\end{cases}$.

例 5 编号为 1,2,…,6 的 6 个人坐在编号为 1,2,…,6 的 6 个座位上,求没有一个人对号入座的方法有多少种?

分析:假设 n 个人坐在 n 个座位上且无一人对号入座有 a_n 种方法. 先安排第 1 号人先座,有 $n-1$ 种方法. 不妨假设第 1 号人坐在 m 号座位上,第二步安排第 m 号人入座,有两种情况:

① 若第 m 号人坐在 1 号位上,此时余下的 $n-2$ 个人坐在 $n-2$ 个座位上且无人对号入座有 a_{n-2} 种方法;

② 若第 m 号人没有坐在 1 号位上,此时问题转化为"编号为 $2,\cdots,m,\cdots,n$ 的 $n-1$ 个人坐在编号为 $1,\cdots,m-1,m+1,\cdots,n$ 的 $n-1$ 个座位上,且无人对号入座". 由于第 m 号人不坐在 1 号位上,故问题相当于"$n-1$ 个人坐在 $n-1$ 个座位上且无人对号入座",有 a_{n-1} 种方法.

综上,有 $a_n=(n-1)(a_{n-2}+a_{n-1})(n\geq 3)$,且 $a_2=1$,$a_3=2$. 递推,有 $a_4=9$,$a_5=44$,$a_6=265$.

读者可以尝试推导本题中数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

评注:递推关系的寻找是解决此类计数问题的关键. 实际上,上述三例都是运用分类加法计数原理得到递推关系的.

3 妙用数列递推关系解概率问题

例 6(2010 年华约联考样题改编) 甲、乙等 4 人相互传球,第一次由甲将球传出,每次传球时,传球者将球等可能地传给另外 3 人中的任何 1 人,则经过 6 次传球后,球在甲手中的概率为____.

分析:"经过 n 次传球后,球在甲手中" 相当于"第 $n-1$ 次传球后球不在甲手中,并且第 n 次传球给了甲",记其概率记为 P_n,则 $P_{n+1}=\frac{1}{3}(1-P_n)$,且 $P_1=0$.

递推,得 $P_2=\frac{1}{3}$,$P_3=\frac{2}{9}$,$P_4=\frac{7}{27}$,$P_5=\frac{20}{81}$,$P_6=\frac{61}{243}$.

例 7 抛掷一枚硬币,每次出现正面得 1 分,出现反面得 2 分. 记恰好得到 n 分的概率为 P_n,则 $P_1=$____,$P_2=$____,$P_n=$____.

分析:设恰好得到 n 分的概率为 P_n,则得到 $n-1$ 分的概率为 P_{n-1},得到 $n-2$ 分的概率为 P_{n-2}.

得 n 分的情况有两种:先得 $n-1$ 分,再掷一次正面,此时概率为 $\frac{1}{2}P_{n-1}$;或先得 $n-2$,再掷一次反面,此时概率为 $\frac{1}{2}P_{n-2}P$. 故有 $P_n=\frac{1}{2}P_{n-1}+\frac{1}{2}P_{n-2}(n\geq 3)$.

易知 $P_1=\frac{1}{2}$,$P_2=\frac{3}{4}$,即得数列的递推关系为 $P_n=\begin{cases}\frac{1}{2}, n=1\\ \frac{3}{4}, n=2\\ \frac{1}{2}P_{n-1}+\frac{1}{2}P_{n-2}(n\geq 3)\end{cases}$.

可得 $n\geq 3$ 时,

$$\begin{cases}P_n-P_{n-1}=-\frac{1}{2}(P_{n-1}-P_{n-2})\\ P_n+\frac{1}{2}P_{n-1}=P_{n-1}+\frac{1}{2}P_{n-2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}P_n-P_{n-1}=(-\frac{1}{2})^n\\ P_n+\frac{1}{2}P_{n-1}=1\end{cases}$$

$\Rightarrow P_n=\frac{1}{3}[2+(-\frac{1}{2})^n]$.

当 $n=1,2$ 时,上式均成立.

例 8(2010 浙江大学自主招生试题) 甲乙两人轮流掷硬币,谁先掷出正面谁就胜,上一局的负者下一局先掷,则每局先掷者胜的概率为____;若第一局由甲先掷,则第 n 局甲胜的概率为____.

分析:每局先掷者胜的概率为 $P=\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^3+(\frac{1}{2})^5+\cdots+(\frac{1}{2})^{2n+1}+\cdots=\frac{2}{3}$.

设第 n 局甲胜的概率为 P_n,

第 n 局甲胜有两类情形:第 $n-1$ 局甲胜且第 n 局甲胜,其概率为 $\frac{1}{3}P_{n-1}$;第 $n-1$ 局甲负且第 n 局甲胜,其概率为 $\frac{2}{3}(1-P_{n-1})$. 故 $n\geq 3$ 时,$P_n=\frac{2}{3}(1-P_{n-1})+\frac{1}{3}P_{n-1}=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}P_{n-1}\Rightarrow P_n-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}(P_{n-1}-\frac{1}{2})$.

又因为 $P_1-\frac{1}{2}=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$,故 $P_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\cdot(-\frac{1}{3})^{n-1}\Rightarrow P_n=\frac{1}{2}[1-(-\frac{1}{3})^n]$.

评注:三个例题以概率为情景,考查数列递推规律的基本知识,以及解决实际问题的能力,富有娱乐性和趣味性,具有新鲜感和时代感,对学生有吸引力,从一个侧面展现数学的魅力. 应该说,在概率中添加进递推数列知识,更让概率流光溢彩.

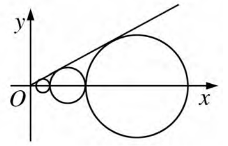
4 数列递推关系与解析几何的完美结合

例 9(2010 年安徽高考·文 21) 设 $C_1,C_2,\cdots,C_n,\cdots$ 是坐标平面上的一列圆,它们的圆心都在 x 轴的正半轴上,且都与直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 相切. 对每一个正整数 n,圆 C_n 都与圆 C_{n+1} 相

互外切,以 r_n 表示圆 C_n 的半径,已知$\{r_n\}$ 为递增数列.

(1) 证明:$\{r_n\}$ 为等比数列;

(2) 设 $r_1=1$,求数列$\{\frac{n}{r_n}\}$ 的前 n 项和.



分析:(1) 设圆 C_n 的圆心坐标为$(x_n,0)$,显然 $x_n>0$ 且递增.

因为圆 C_n 与直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 相切,即圆心到直线的距离等于半径,化简得 $x_n=2r_n$. 又因为圆 C_n 与圆 C_{n+1} 相互外切,即圆心距等于两圆半径之和,即 $x_{n+1}-x_n=r_{n+1}+r_n$.

综上,有 $2r_{n+1}-2r_n=r_{n+1}+r_n \Rightarrow r_{n+1}=3r_n$,即$\{r_n\}$ 为等比数列,其公比 $q=3$.

(2) 由于 $r_1=1,q=3$,故 $r_n=3^{n-1}$,从而$\frac{n}{r_n}=n\cdot 3^{1-n}$.

记数列$\{\frac{n}{r_n}\}$ 的前 n 项和为 S_n,则有 $S_n=1+2\cdot 3^{-1}+3\cdot 3^{-2}+\cdots+n\cdot 3^{1-n}$,

$\Rightarrow \frac{S_n}{3}=1\cdot 3^{-1}+2\cdot 3^{-3}+\cdots+(n-1)\cdot 3^{1-n}+n\cdot 3^{-n}$.

两式相减,得$\frac{2S_n}{3}=1+3^{-1}+3^{-2}+\cdots+3^{1-n}-n\cdot 3^{-n}=\frac{1-3^{-n}}{1-3^{-1}}-n\cdot 3^{-n}=\frac{3}{2}-(n+\frac{3}{2})\cdot 3^{-n}$,

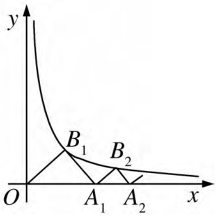
所以,$S_n=\frac{9}{4}-\frac{1}{2}(n+\frac{3}{2})\cdot 3^{1-n}=\frac{9-(2n+3)\cdot 3^{1-n}}{4}$.

评注:本题巧妙地将数列递推关系嵌入到直线与圆、圆与圆的位置关系这个解析几何背景中,考查了抽象能力以及推理论证能力.

例 10 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 顺次为 x 轴上的点,$B_1,B_2,\cdots,B_n,\cdots$ 顺次为双曲线 $y=\frac{1}{x}$ 右支上的点,且 ΔOB_1A_1,$\Delta A_1B_2A_2,\cdots,\Delta A_{n-1}B_nA_n,\cdots$ 均为等腰直角三角形,其中 B_1,$B_2,\cdots,B_n,\cdots$ 为直角顶点. 设点 A_n 的坐标为$(x_n,0)(n=1,2,3,\cdots)$.

(1) 求数列$\{x_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 S_n 为数列$\{\frac{1}{x_n}\}$ 的前 n 项和,试比较 $\log_a(S_n+1)$ 与$\frac{1}{2}\log_a(n+1)$ 的大小(其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$).



分析:(1) 由题意,直线 A_nB_{n+1} 的方程为 $y=x-x_n$. 联立方程组$\begin{cases} y=x-x_n \\ y=\frac{1}{x} \end{cases}(x>0)$得点 B_{n+1} 的坐标为$(\frac{\sqrt{x_n^2+4}+x_n}{2},\frac{\sqrt{x_n^2+4}-x_n}{2})$.

因为 $\Delta A_nB_{n+1}A_{n+1}$ 为等腰直角三角形,故点 A_n 与 A_{n+1} 关于直线 $x=\frac{\sqrt{x_n^2+4}+x_n}{2}$ 对称,即 $x_n+x_{n+1}=\sqrt{x_n^2+4}+x_n \Rightarrow x_{n+1}^2-x_n^2=4$,即数列$\{x_n^2\}$ 是以 $x_1=0$ 为首项、以 $d=4$ 为公差的等差数列.

故 $x_n^2=4n \Rightarrow x_n=2\sqrt{n}$.

(2) 由(1) 知,$\frac{1}{x_n}=\frac{1}{2\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$,

故 $S_n>(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\sqrt{n+1}-1 \Rightarrow S_n+1>\sqrt{n+1}$.

当 $0<a<1$ 时,$\log_a(S_n+1)<\log_a\sqrt{n+1}=\frac{1}{2}\log_a(n+1)$;

当 $a>1$ 时,$\log_a(S_n+1)>\log_a\sqrt{n+1}=\frac{1}{2}\log_a(n+1)$.

评注:本题中,等差数列$\{x_n^2\}$ 隐藏在双曲线与等腰直角三角形等相关位置关系之中,准确地提炼出递推关系是问题的突破口.

以上通过几个实例说明了数列递推关系在几类问题中的应用,但是如何确定一些问题中是否存在递推关系,存在什么样的递推关系,以及如何建立递推关系,这都需要我们运用所学知识来仔细推敲.

总之,以上这种创造性地将数列递推关系融入相关问题,不仅能考查递推数列的求通项公式、求和等重点知识,更能拓宽数学视野,培养发现问题、分析问题的习惯,提升创新意识和个性思维品质.

参考文献

[1] 夏国华. 数列与函数相结合的题型求解方法[J]. 中学数学研究,2002(7):39-42.

[2] 孙禾. 从高考题看数列与函数结合点[J]. 高中生之友,2010(10上):22.

[3] 吴成强. 建立递推关系解排列组合题[J]. 数理天地,2012(9):13-14.

[4] 刘兆成. 递推思想在概率中的应用[J]. 数学教学与研究·考试周刊,2012(33):56-57.

[5] 范红波. 由考题谈一类数列与解析几何相结合的题型求解方法[J]. 数学教学研究,2010(10):29-35.

[6] 王怀学. 解析几何与数列交汇问题的变化趋势[J]. 高中生之友,2011(1-2上):36-38.

[7] 林建南. 活跃着递推数列的创新情景[J]. 福建中学数学,2008(2):6-10.