

挖掘问题背景 发现曲线共性

——基于 2022 年全国甲卷圆锥曲线试题的研究

邓清¹ 姜易京²

(1. 贵阳市乌当中学 贵州 贵阳 550018; 2. 贵州师范大学 贵州 贵阳 550025)

摘要:以 2022 年全国甲卷第 20 题为研究对象,对解题过程中发现的问题背景进行挖掘,得到了试题中蕴藏的定值、定点特征. 探究定值与定点这两个特征之间的关联,将这些关联特征推广到任意圆锥曲线中,得到这一“蝴蝶模型”在圆锥曲线中的统一共性.

关键词:高考试题; 定点定值; 蝴蝶模型; 共性特征

解析几何中存在很多的共性问题,不仅蕴藏在统一的代数结构上,还会蕴藏在具有对偶性的几何图形中. 文章对 2022 年全国甲卷第 20 题的圆锥曲线试题进行探究时,发现试题隐藏着一类直线的定值与定点问题. 将定点一般化,发现定值与定点的代数关系. 同时,又发现被动直线还存在过定点的特征,于是再从另一角度审视定值与定点的关系,并将该性质推广到其它圆锥曲线中.

1 试题呈现

题目 如图 1, 设抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 点 $D(p, 0)$, 过点 F 的直线交 C 于 M, N 两点. 当直线 MD 垂直于 x 轴时, $|MF| = 3$.

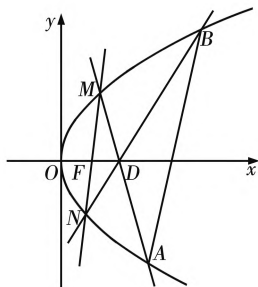


图1

(1) 求 C 的方程;

(2) 设直线 MD, ND 与 C 的另一个交点分别为 A, B , 记直线 MN, AB 的倾斜角分别为 α, β , 当 $\alpha - \beta$ 取得最大值时, 求直线 AB 的方程.

2 问题分析与解决

分析 本题第(1)小题主要考查学生对抛物线的求解, 根据两点之间距离公式将 MF 转化为到准线的距离, 可解得 $p = 2$. 第(2)小题需要将 $\alpha - \beta$ 取得最大值的问题转化为两直线的斜率关系进行求解. 下面仅呈现问题(2)的解决.

解析 由(1)知 $C: y^2 = 4x$.

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), A(x_3, y_3), B(x_4, y_4)$, 由 $F(1, 0)$ 可设直线 $MM: x = ty + 1$, 代入 $y^2 = 4x$, 得 $y^2 -$

$4ty - 4 = 0$, 所以 $y_1 y_2 = -4$.

$$\text{则 } k_{MN} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{4(y_1 - y_2)}{y_1^2 - y_2^2} = \frac{4}{y_1 + y_2}.$$

由 $D(2, 0)$ 可设直线 $MA: x = my + 2$, 代入 $y^2 = 4x$, 得 $y^2 - 4my - 8 = 0$.

$$\text{由 } y_1 y_3 = -8, \text{ 得 } y_3 = \frac{-8}{y_1}, x_3 = \frac{y_3^2}{4} = \frac{16}{y_1^2}.$$

所以 $A\left(\frac{16}{y_1^2}, \frac{-8}{y_1}\right)$. 同理, $B\left(\frac{16}{y_2^2}, \frac{-8}{y_2}\right)$.

$$\text{故 } k_{AB} = \frac{y_3 - y_4}{x_3 - x_4} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{y_1 y_2}{y_1 + y_2} = \frac{2}{y_1 + y_2} = \frac{1}{2} k_{MN}.$$

即 $\tan \alpha = 2 \tan \beta$.

$$\text{因此 } \tan(\alpha - \beta) = \frac{k_{MN} - k_{AB}}{1 + k_{MN} k_{AB}} = \frac{k_{AB}}{1 + 2k_{AB}^2}.$$

要使 $\alpha - \beta$ 最大, 应有 $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 即 $k_{AB} > 0$, 此时

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{k_{AB}}{1 + 2k_{AB}^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}, \text{ 当且仅当 } k_{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 时取}$$

等号. 此时可设直线 $AB: x = \sqrt{2}y + n$, 代入 $y^2 = 4x$, 得 $y^2 - 4\sqrt{2}y - 4n = 0$, 则有 $\Delta > 0, y_3 y_4 = \frac{64}{y_1 y_2} = -16 = -$

$4n$, 解得 $n = 4$.

所以此时直线 $AB: x = \sqrt{2}y + 4$.

3 探究发现与结论推广

3.1 探究发现

在解决数学问题的过程中, 当得到的结论具有某一特质时, 我们会有一种奇异性的感受, 总会希望这一特质具有一般规律性. 观察解题过程, 发现当抛物线的弦 MN 经过焦点 F , MA, NB 过定点 D 时, 直线 MN

作者简介: 邓清(1985-), 男, 贵州贵阳人, 硕士, 中学一级教师, 研究方向: 中学数学教学研究.

与直线 AB 斜率之比为定值. 为了得到更为一般的结论, 将两个定点在 x 轴上的位置一般化, 探究斜率之比与两定点的代数关系.

结论 1 如图 2, $T(t, 0), D(n, 0)$ 为抛物线 $y^2 = 2px$ 对称轴上两定点, 过点 T 且不垂直于 x 轴的直线交 C 于 M, N 两点. 直线 MD, ND 与 C 的另一个交点分别为 A, B, AB 与 x 轴交于点 E . 则直线 MN 与 AB 斜率之比为定值 $\frac{n}{t}$.

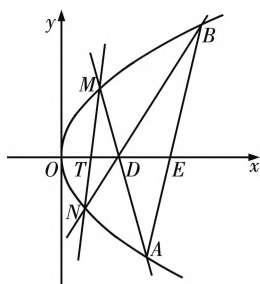


图2

证明 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), A(x_3, y_3), B(x_4, y_4)$, 由 M, T, N 三点共线, 得 $\frac{y_1}{x_1 - t} = \frac{y_2}{x_2 - t}$.

$$\text{即 } \frac{y_1}{y_1^2 - 2pt} = \frac{y_2}{y_2^2 - 2pt}. \text{ 整理, 得 } y_1 y_2 = -2pt,$$

$$\text{所以 } k_{MN} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{2p(y_1 - y_2)}{y_1^2 - y_2^2} = \frac{2p}{y_1 + y_2}.$$

同理, 由 M, D, A 三点共线可得: $y_1 y_3 = -2pn$,

$$y_3 = \frac{-2pn}{y_1}, x_3 = \frac{y_3^2}{2p} = \frac{2pn^2}{y_1^2}, A\left(\frac{2pn^2}{y_1^2}, \frac{-2pn}{y_1}\right).$$

$$\text{由 } N, D, B \text{ 三点共线可得 } B\left(\frac{2pn^2}{y_2^2}, \frac{-2pn}{y_2}\right).$$

$$\text{所以 } k_{AB} = \frac{y_3 - y_4}{x_3 - x_4} = -\frac{1}{n} \cdot \frac{y_1 y_2}{y_1 + y_2} = \frac{2pt}{n(y_1 + y_2)}.$$

$$\text{所以 } \frac{k_{MN}}{k_{AB}} = \frac{n}{t}.$$

以上结论说明, 直线 MN 的斜率与直线 AB 的斜率是成正比的, 比例系数为两个定点的横坐标之比. 若直线 MN 绕着定点 T 旋转, 则直线 AB 也会随之旋转, 这似乎预示着直线 AB 在旋转过程中可能也会经过某一定点. 这一动中有静的特征启发我们作进一步的猜想与证明.

结论 2 如图 2, $T(t, 0), D(n, 0)$ 为抛物线 $y^2 = 2px$ 对称轴上两定点, 过点 T 且不垂直于 x 轴的直线交 C 于 M, N 两点. 直线 MD, ND 与 C 的另一个交点分别为 A, B , 则直线 AB 恒过定点 $E\left(\frac{n^2}{t}, 0\right)$.

证明 用结论 1 证明过程的条件, 设 $E(s, 0)$, 由 N, D, B 三点共线可得 $\frac{y_3}{x_3 - s} = \frac{y_4}{x_4 - s}$.

将 x_3, y_3, x_4, y_4 代入整理, 得

$$2pn^2(y_1 - y_2) = sy_1 y_2(y_2 - y_1).$$

$$\text{将 } y_1 y_2 = -2pt \text{ 代入得 } s = \frac{n^2}{t}.$$

所以直线 AB 恒过定点 $E\left(\frac{n^2}{t}, 0\right)$.

根据结论 1 和结论 2 不难看出, 直线 MN 与直线 AB 在斜率和定点上都存在着对偶关系. 事实上, 通过以上高考试题的特例容易观察出两个斜率定比与三个定点之间也存在直接的关联, 于是从另一角度研究, 得到两直线斜率之比所得定值与三个定点间的一个等量关系.

结论 3 如图 2, $T(t, 0), D(n, 0)$ 为抛物线 $y^2 = 2px$ 对称轴上两定点, 过点 T 且不垂直于 x 轴的直线交 C 于 M, N 两点. 直线 MD, ND 与 C 的另一个交点分别为 A, B, AB 与 x 轴交于点 E , 则直线 MN 与 AB 斜率之比为定值, 且 $\frac{k_{MN}}{k_{AB}} = \left| \frac{DE}{DT} \right|$.

证明 用结论 1 与结论 2 证明过程的条件, $\left| \frac{DE}{DT} \right| =$

$$\frac{n-t}{s-n} = \frac{n-t}{\frac{n^2}{t}-n} = \frac{n}{t}, \text{ 由结论 1 可知 } \frac{k_{MN}}{k_{AB}} = \frac{n}{t}.$$

$$\text{所以 } \frac{k_{MN}}{k_{AB}} = \left| \frac{DE}{DT} \right|.$$

3.2 结论推广

以上定点、定值的结论都是以抛物线为背景探究所得, 很自然地尝试将这些结论推广到椭圆和双曲线中. 但在对猜想进行证明时, 考虑到椭圆上点的坐标代换相对抛物线较难, 且涉及证明直线过定点问题, 因此借助曲线系方程这一工具, 可以简化运算过程.

结论 4 如图 3, $T(t, 0), D(n, 0)$ 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 长轴上两定点, 过点 T 且不垂直于 x 轴的直线交 C 于 M, N 两点. 直线 MD, ND 与 C 的另一个交点分别为 A, B, AB 与 x 轴交于点 E , 则 $\frac{k_{MN}}{k_{AB}} = \left| \frac{DE}{DT} \right|$, 且直线 AB 恒过定点 $E\left(\frac{2an^2 - a^2 t - n^2 t}{a^2 + n^2 - 2nt}, 0\right)$.

证明 设直线 $MA: x = m_1 y + n$, 直线 $NB: x = m_2 y + n$, 经过 M, N, A, B 四点的曲线系方程可设为

$$(x - m_1 y - n)(x - m_2 y - n) + \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) = 0.$$

$$\text{整理, 得 } \left(1 + \frac{\lambda}{a^2} \right) x^2 + \left(m_1 m_2 + \frac{\lambda}{b^2} \right) y^2 - (m_1 + m_2)$$

$$xy - 2nx + n(m_1 + m_2)y + n^2 - \lambda = 0. \quad (1)$$

设直线 $MN: x = r_1 y + t$, 直线 $AB: x = r_2 y + s$, 则曲

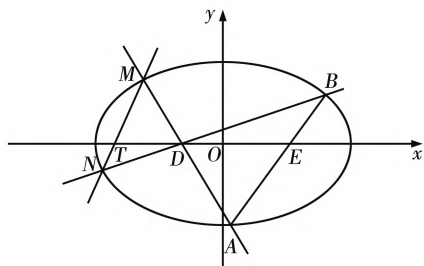


图3

线 MN, AB 的方程为 $(x - r_1y - t)(x - r_2y - s) = 0$.

$$\text{整理, 得 } x^2 + r_1r_2y^2 - (r_1 + r_2)xy - (s + t)x + (r_1s + r_2t)y + st = 0. \quad (2)$$

方程①②表示同一曲线时, 有

$$\frac{m_1 + m_2}{r_1 + r_2} = \frac{2n}{s + t} = \frac{n(m_1 + m_2)}{r_1s + r_2t} = \frac{n^2 - \lambda}{st} = 1 + \frac{\lambda}{a^2}.$$

根据等比性质, 得

$$\frac{m_1 + m_2}{r_1 + r_2} = \frac{2n}{s + t} = \frac{n(m_1 + m_2)}{r_1s + r_2t} = \frac{n^2 + a^2}{st + a^2}. \quad (3)$$

$$\text{由 } \frac{2n}{s + t} = \frac{n^2 + a^2}{st + a^2}, \text{ 得 } s = \frac{2na^2 - (n^2 + a^2)t}{n^2 + a^2 - 2nt}.$$

$$\text{因此直线 } AB \text{ 恒过定点 } E\left(\frac{2an^2 - a^2t - n^2t}{a^2 + n^2 - 2nt}, 0\right).$$

$$\text{由 } (3) \text{ 可得 } \frac{1}{r_1 + r_2} = \frac{n}{r_1s + r_2t}.$$

$$\text{即 } \frac{k_{MN}}{k_{AB}} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{s - n}{n - t} = \frac{|DE|}{|DT|}.$$

将以上问题背景替换成双曲线, 只需把证明过程

中①式里的 b^2 替换成 $-b^2$, 并不影响 $\frac{r_2}{r_1} = \frac{s - n}{n - t}$ 和 $s = \frac{2na^2 - (n^2 + a^2)t}{n^2 + a^2 - 2nt}$ 两个结论, 因此以上结论在双曲线中依然成立.

结论 5 如图 4, $T(t, 0), D(n, 0)$ 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 实轴上两定点, 过点 T 且不垂直于 x 轴的直线交 C 于 M, N 两点. 直线 MD, ND 与 C 的另一个交点分别为 A, B , AB 与 x 轴交于点 E , 则 $\frac{k_{MN}}{k_{AB}} = \frac{|DE|}{|DT|}$, 且直线 AB 恒过定点 $E\left(\frac{2an^2 - a^2t - n^2t}{a^2 + n^2 - 2nt}, 0\right)$.

以上结论都是在圆锥曲线中取 4 条形如蝴蝶的弦为研究对象得出的, 它也很像圆锥曲线中蝴蝶定理的图形, 我们姑且将它称为圆锥曲线中的“蝴蝶模型”. 把两弦交点称为模型的中心, 另外两弦称为蝴蝶

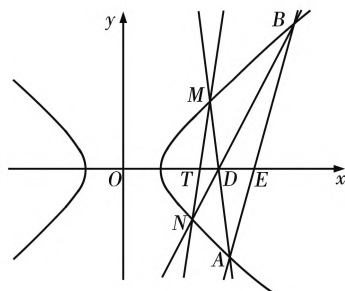


图4

的两翼. 以上探究得出: 在任意圆锥曲线中, 若“蝴蝶模型”满足中心为 x 轴上一定点, 其中一翼过 x 轴上另一定点, 则另一翼亦过 x 轴上的某一定点, 且此时两翼所在直线斜率之比为定值. 事实上, 当两个定点在圆锥曲线内更一般的位置时, 如图 5, 此时依然满足另一翼所在直线过定点, 且三个定点共线. 但此时两翼所在直线斜率之比不再是一个定值, 那么它们满足什么关系, 有待更进一步的研究.

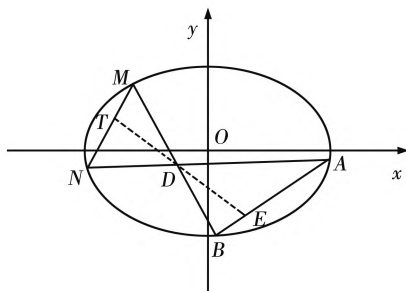


图5

4 结束语

呈现试题的解题过程后, 挖掘出试题中蕴藏的定值、定点的结论, 借助曲线系方程这一工具, 将其推广到其它圆锥曲线中, 并发现定值与定点之间的距离关系, 得到蝴蝶模型在圆锥曲线中的统一特征.

问题解决过程中, 根据问题特征修改思维方式和思维手段, 减少思维的盲目性和触发性. 把目光聚焦在影响问题结论的关键部分, 提取其中的核心要素, 避开次要因素的影响, 往往能得到意料之外的探究结果.

参考文献:

[1] 邓清. 启于数学审美 探得曲线共性——基于 2021 年全国甲卷圆锥曲线试题的研究[J]. 中学数学杂志, 2021(11): 61-64.

[2] 邓清, 夏小刚. 数学思维视域下“教表达”的再认识与思考[J]. 数学教育学报, 2019, 28(05): 47-50.

(收稿日期: 2022-07-21)