概率中的递推关系

河北乐亭第一中学　王淑芬　063600

概率是高中数学教材的新增内容，概率问题往往具有实践性和操作性的特点，在理论和实际生活中都有很重要的意义，因此在高考和竞赛中对其考查的力度必将进一步加大. 本文介绍用递推思想方法探求概率问题，体现了数列与概率知识网络的交汇性.

例 1　某个电器开关闭合后，会出现红灯或绿灯闪动. 已知开关第一次闭合，出现红灯和出现绿灯的概率都是$\frac{1}{2}$，从开关第二次闭合起，若前次出现红灯，则下一次出现红灯的概率是$\frac{1}{3}$，出现绿灯的概率是$\frac{2}{3}$；若前次出现绿灯，则下一次出现红灯的概率是$\frac{3}{5}$，出现绿灯的概率是$\frac{2}{5}$；记开关第 n 次闭合后出现红灯的概率为 P_n.

(1) 求 P_2

(2) 求证：$P_n<\frac{1}{2}(n\geqslant 2)$

解：(1) 开关第二次闭合后出现红灯的概率 P_2 的大小取决于两个互斥事件：第一次红灯后第二次又是红灯、第一次绿灯后第二次是红灯，于是 $P_2=P_1\cdot\frac{1}{3}+(1-P_1)\cdot\frac{3}{5}=\frac{7}{15}$

(2) 受(1)的启发，研究开关第 n 次闭合后出现红灯的概率 P_n，要考虑开关第 $n-1$ 次闭合后出现红、绿灯的情况，$\therefore P_n=P_{n-1}\cdot\frac{1}{3}+(1-P_{n-1})\cdot\frac{3}{5}$ $=-\frac{4}{15}P_{n-1}+\frac{3}{5}$，

再利用待定系数法：令 $P_n+x=-\frac{4}{15}(P_{n-1}+x)$，整理可得 $x=-\frac{9}{19}$，

故 $\left\{p_n-\frac{9}{19}\right\}$ 为等比数列，则 $P_n-\frac{9}{19}=\left(P_1-\frac{9}{19}\right)\cdot\left(-\frac{4}{15}\right)^{n-1}=\frac{1}{38}\cdot\left(-\frac{4}{15}\right)^{n-1}$，

$\therefore P_n=\frac{9}{19}+\frac{1}{38}\cdot\left(-\frac{4}{15}\right)^{n-1}$.

$\therefore$ 当 $n\geqslant 2$ 时，$P_n=\frac{9}{19}+\frac{1}{38}\cdot\left(-\frac{4}{15}\right)^{n-1}<\frac{9}{19}+\frac{1}{38}=\frac{1}{2}$

点评：本题求解过程中 P_n 与 P_{n-1} 的关系为“$P_n=AP_{n-1}+B$(A、B 为常数，$A\neq 0$)”型，是一个一阶递推关系，通过构造等比数列求解.

例 2　(第二十二届加拿大数学奥林匹克试题) 如图，$\frac{n(n+1)}{2}$个不同的数随机排成一个三角阵，设 M_k 是从上往下数第 k 行中的最大数，求 $M_1<M_2<\cdots<M_n$ 的概率.

解：设所求的概率为 P_n，则 $M_1<M_2<\cdots<M_{n-1}$

×

× ×

× × ×

× × × ×

……

× × …… × ×

例2图

的概率为 P_{n-1}，而最大数在第 n 行的概率为 $\frac{n}{\frac{n(n+1)}{2}}$ $=\frac{2}{n+1}$ 于是 $P_n=\frac{2}{n+1}P_{n-1}$

又 $P_1=1$，$P_2=\frac{2}{3}P_1$，$P_3=\frac{2}{4}P_2$　$P_4=\frac{2}{5}P_3$，…，$P_n=\frac{2}{n+1}P_{n-1}$

以上各式相乘，得：$P_n=1\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{4}\times\cdots\times\frac{2}{n+1}=\frac{2^n}{(n+1)!}$

所以 $M_1<M_2<\cdots<M_n$ 的概率为 $\frac{2^n}{(n+1)!}$

点评：本题求解过程中 P_n 与 P_{n+1} 的关系为 $P_{n+1}=A\cdot P_n$（$\{A_n\}$为一数列），通过迭代法求解.

例3　有人玩掷硬币走跳棋的游戏，已知硬币出现正、反面的概率都是 $\frac{1}{2}$，棋盘上标有第 0 站、第 1 站、第 2 站、……、第 100 站. 一枚棋子开始在第 0 站（即 $P_0=1$），棋手每掷一次硬币，棋子向前跳动一次，若掷出正面，棋子向前跳一站（从第 k 站到第 $k+1$ 站）；若掷出反面，棋子向前跳二站（从第 k 站到第 $k+2$ 站），直到棋子跳到第 99 站（胜利大本营）或跳到第 100 站（失败集中营）时，该游戏结束. 设棋子跳到地 n 站的概率为 P_n

(1) 求 P_1、P_2、P_3 的值；

(2) 设 $a_n=P_n-P_{n-1}$（$n\in\mathbf{N}$，$1\leqslant n\leqslant 100$），求证：$\{a_n\}$是等比数列；

(3) 求玩该游戏获胜的概率和失败的概率.

解：(1) 第一次抛掷硬币出现正面，棋子跳到第 1 站，其概率为 $\frac{1}{2}$，$\therefore P_1=\frac{1}{2}$

棋子跳到第 2 站，有以下两种情况：① 前两次掷硬币都出现正面，棋子跳到第 1 站，其概率为 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，② 第一次抛掷硬币出现反面，棋子跳到第 1 站，其概率为 $\frac{1}{2}$，

$\therefore P_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$　类似有 $P_3=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$

(2) 棋子跳到第 $n+1$ 站的情况有以下两种，而且也只有以下两种情况：① 棋子先到第 n 站，又掷出正面，棋子跳到第 $n+1$ 站，其概率为 $\frac{1}{2}P_n$，② 棋子先到第 $n-1$ 站，又掷出反面，棋子跳到第 $n+1$ 站，其概率为 $\frac{1}{2}P_{n-1}$　$\therefore P_{n+1}=\frac{1}{2}P_n+\frac{1}{2}P_{n-1}$

$\therefore a_n=P_n-P_{n-1}=\frac{1}{2}P_{n-1}+\frac{1}{2}P_{n-2}-P_{n-1}=\frac{1}{2}(P_{n-2}-P_{n-1})=-\frac{1}{2}a_{n-1}$

$\therefore \frac{a_n}{a_{n-1}}=-\frac{1}{2}$（定值），故数列$\{a_n\}$是等比数列；

(3) 由(2)可求得 $a_n=a_1\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=(P_1-P_0)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$　即 $P_n-P_{n-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

$\therefore P_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}+\cdots+1=\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$

要获胜，棋子跳到第 99 站后游戏结束，不再需要跳到第 100 站，

$\therefore$获胜的概率为 $P_{99}=1+\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{3}+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{99}=\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{100}\right]=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{2^{100}}\right)$

而棋子跳到第100站，必须是从第98站直接跳到第100站，

$\therefore$ 失败的概率为 $P_{100}=\frac{1}{2}P_{98}=\frac{1}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{99}\right]=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2^{99}}\right)$

故玩该游戏获胜的概率为$\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{2^{100}}\right)$，失败的概率为$\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2^{99}}\right)$

点评：① 本题设计巧妙，综合性很强.求解过程中的关系式为“$P_{n+1}=A\cdot P_n+B\cdot P_{n-1}$（$A$、$B$ 为常数，$AB\neq 0$）”型，是一个二阶递推关系，通过构造等比数列求解.

② 特别需注意 P_{100} 的求法，$P_{100}=\frac{1}{2}P_{98}$，不要产生 $P_{100}=\frac{1}{2}P_{98}+\frac{1}{2}P_{99}$ 的错解.

做好数列与概率的交汇题需要注意以下几个方面：

(1) 在概率问题重复多次发生时，我们可以将所求概率视为是一个递推数列.

(2) 利用互斥事件或者独立事件的概率公式，根据题意探索 P_n 与 P_{n+1} 的关系或 P_n、P_{n+1} 与 P_{n+2} 的关系.

(3) 通过化归思想转化为递推数列问题，利用求递推数列通项公式的方法求解.

对应练习：

1. A、B、C、D、E 五人在球场上传球，每个人可以将球传给其他人且机会均等，设第 $n-1$ 次传回 A 的概率为 P_{n-1}，第 n 次传回 A 的概率为 P_n，

(1) 求 P_n 与 P_{n-1} 的关系式($n\geqslant 2$)

(2) 求第 n 次传回 A 的概率为 P_n.

2. (第十二届加拿大数学奥林匹克试题)抛掷一枚硬币，每次正面出现得1分，反面出现得2分，试证：恰好得到 n 分的概率是$\frac{1}{3}\left[2+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right]$.

3. 原点出发的某质点 M，按向量 $\boldsymbol{a}=(0,1)$ 移动的概率为$\frac{2}{3}$，按向量 $\boldsymbol{b}=(0,2)$ 移动的概率为$\frac{1}{3}$，设 M 到达点$(0,n)$的概率为 P_n，求 P_n.

答案：1. (1) $P_n=\frac{1}{4}(1-P_{n-1})(n\geqslant 2)$

(2) $P_n=-\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\frac{1}{5}$

2. 略

3. $P_n=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}$