

极点极线视域下圆锥曲线试题的应用探索

福建省泉州市晋江市紫峰中学 (362200) 曾晓丽

摘要 极点与极线是高等几何中的重要概念, 不属于《高中数学课程标准》规定的学习内容, 在高考考查的范围之外. 但由于极点与极线是圆锥曲线的一种基本特征, 在高考关于圆锥曲线的试题中经常有所反映. 如果我们了解一些圆锥曲线中极点与极线的知识运用, 可以帮助我们明确解决问题的方向, 快速得到结论, 增强解决问题的信心. 培养学生进行研究性学习习惯, 提高学生对数学学科核心素养的认识, 从而激发学生更有兴趣深入探究问题.

关键词 圆锥曲线; 定点定值; 调和性质; 核心素养

定义 1 (极点, 极线) 若圆锥曲线 $C: Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, 已知点 $P(x_0, y_0)$ (非中心), 直线 $l: Ax_0x + B\frac{x_0y + y_0x}{2} + Cy_0y + D\frac{x_0 + x}{2} + E\frac{y_0 + y}{2} + F = 0$, 则称点 $P(x_0, y_0)$ 是直线 l 关于圆锥曲线 C 的极点, 直线 l 称为 P 点关于曲线 C 的极线.

性质 1 若 P 在圆锥曲线 C 上, 则 P 关于 C 的极线即 C 为在 P 处的切线.

性质 2 (配极原理) 关于圆锥曲线 C , 若 P 在 Q 的极线上, 则 Q 在 P 的极线上, 并称 P, Q 关于 C 调和共轭.

性质 3 (极线即切点弦) 过圆锥曲线 C 外的一点 P 作 PA, PB 切 C 于 A, B 两点, 则 AB 为 P 关于 C 的极线.

定义 2 (调和点列) 若直线 l 上四个点 A, B, C, D 满足 $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$, 则 A, B, C, D 是一组调和点列.

定义 3 (调和线束) 四条直线 l_1, l_2, l_3, l_4 相交于一点, 记直线 l_i, l_j 的夹角为 α_{ij} , 若 $\frac{\sin \alpha_{12}}{\sin \alpha_{23}} = \frac{\sin \alpha_{14}}{\sin \alpha_{34}}$, 则 l_1, l_2, l_3, l_4

是一簇调和线束.

性质 4 (调和点列与调和线束的转换) 若直线上有四个点 A, B, C, D , 直线外有一点 P , 若 $A, C; B, D$ 调和, 则 $PA, PC; PB, PD$ 调和; 反之也成立.

证明 由正弦定理,

$$\frac{AB}{\sin \angle APB} = \frac{AP}{\sin \angle ABP}, \frac{BC}{\sin \angle BPC} = \frac{CP}{\sin \angle CBP}.$$

两式相除得 $\frac{\sin \angle APB}{\sin \angle BPC} = \frac{AB \cdot CP}{BC \cdot AP}$, 同理 $\frac{\sin \angle APD}{\sin \angle DPC} = \frac{AD \cdot CP}{DC \cdot AP}$, 所以 $A, C; B, D$ 调和 $\Leftrightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} \Leftrightarrow \frac{\sin \angle APB}{\sin \angle BPC} = \frac{\sin \angle APD}{\sin \angle DPC} \Leftrightarrow PA, PC; PB, PD$ 调和.

性质 5 (极点极线与调和点列的转换) 圆锥曲线 C 上有 A, B 两点, 若 $P, Q; A, B$ 是调和点列, 则 P, Q 关于 C 调和共轭.

证明 (以 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 为例): 若 $P, Q; A, B$ 是调和点列, 则设 $\vec{AP} = \lambda \vec{PB}, \vec{AQ} = -\lambda \vec{QB}, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 所以 $P(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}), Q(\frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}, \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda})$. 因为 $A, B \in C$ 有

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \quad (1)$$

$$\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1, \quad (2)$$

由①- λ^2 ②得:

$$\frac{(x_1 + \lambda x_2)(x_1 - \lambda x_2)}{a^2} + \frac{(y_1 + \lambda y_2)(y_1 - \lambda y_2)}{b^2} = (1 - \lambda)(1 + \lambda),$$

从而

类似题 4.2 (2019 年高考新课标 II 卷理科第 20 题) 已知函数 $f(x) = \sin x - \ln(x + 1)$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数, 求证:

(1) $f'(x)$ 在区间 $(-1, \frac{\pi}{2})$ 存在唯一极大值点;

(2) $f(x)$ 有且仅有 2 个零点.

类似题 4.3 (2020 年高考新课标 III 理科第 21 题节选) 设 $f(x) = x^3 - \frac{3}{4}x + c$, 若 $f(x)$ 有一个绝对值不大于 1 的零点, 证明: $f(x)$ 所有零点的绝对值都不大于 1.

参考文献

- [1] 徐正印, 白庆全. 一类与函数零点个数有关问题的统一解法 [J]. 中学数学研究 (华南师范大学版), 2020(12): 48-49.
- [2] 范文满, 凌小平. 例谈求解函数零点问题的方法 [J]. 上海中学数学, 2019(10): 41-43.
- [3] 徐正印. 例析寻求函数零点所在区间端点的思维途径 [J]. 中学数学研究 (华南师范大学版), 2019(6): 4-6.

$$\frac{(x_1 + \lambda x_2) \cdot (x_1 - \lambda x_2)}{(1 + \lambda) \cdot (1 - \lambda)} + \frac{(y_1 + \lambda y_2) \cdot (y_1 - \lambda y_2)}{(1 + \lambda) \cdot (1 - \lambda)} = 1.$$

即证 P, Q 关于 C 调和共轭.

引理 若 $A_1, A_2; B_1, B_2$ 在圆锥曲线 C 上, $A_1B_1 \cap A_2B_2 = P, A_1B_2 \cap A_2B_1 = Q$, 则 P, Q 调和共轭.

证明 在 A_1B_1 上取 $Q_1 \neq P$ 使得 $A_1, B_1; P, Q_1$ 调和, 由性质 5 有 Q_1 在 P 的极线上. 设 $QQ_1 \cap A_2B_2 = Q_2$, 由 $QA_1, QB_1; QP, QQ_1$ 调和, 有 $B_2, A_2; P, Q_2$ 调和, 故 Q_2 在 P 的极线上. 于是 Q_1Q_2 为 P 的极线, 而 $Q \in Q_1Q_2$, 故 Q 在 P 的极线上, 即 P, Q 关于曲线 C 调和共轭.

性质 6 (平行线被调和线束平分) $l_1, l_3; l_2, l_4$ 是调和线束, 若 $l // l_1$ 交 l_2, l_3, l_4 于 A, B, C , 则 B 为 A, C 中点.

证明 设线束交于 P 点, 则

$$\begin{aligned} \frac{PB}{AB} &= \frac{\sin \angle PAB}{\sin \angle APB} = \frac{\sin \alpha_{12}}{\sin \alpha_{23}} \\ &= \frac{\sin \alpha_{14}}{\sin \alpha_{34}} = \frac{\sin \angle PCB}{\sin \angle BPC} = \frac{PB}{BC}, \end{aligned}$$

故 $AB = BC$. 即证 B 为 A, C 中点.

例 1 (2023 年高考乙卷理科第 20 题) 已知椭圆 $C: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$, 点 $A(-2, 0)$ 在 C 上.

(1) 求 C 的方程;

(2) 过点 $(-2, 3)$ 的直线交 C 于 P, Q 两点, 直线 AP, AQ 与 y 轴的交点分别为 M, N , 证明: 线段 MN 的中点为定点.

解 (1) 由题意 $b = 2, \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ 得知: $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, 从而 $a = 3$, 所以曲线 C 的方程为: $\frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{4} = 1$.

(2) 证明: 令 $B(-2, 3)$, 如

图 1, 在线段 PQ 上取一点 E 使得 $\frac{|BQ|}{|QE|} = \frac{|BP|}{|PE|}$, 即

$B, E; P, Q$ 为调和点列, 又 P, Q 是椭圆 C 上的点, 根据性质 5 可知: B, E 关于椭圆 C 调和共轭, 所以点 E 在点 B 的极线上, 点 B 的极线 l 为: $y = \frac{3}{2}x + 3$.

又因为 $A(-2, 0)$, 所以点 A 也在极线 l 上, 即直线 AE 就是极线 l . 因为 $B, E; P, Q$ 为调和点列, 所以 $AB, AE; AP, AQ$ 为调和线束. 由题可知: 直线 $AB: x = -2$, 所以 $AB // y$ 轴, 又因为直线 AP, AE, AQ 分别与 y 轴交于点 M, D, N , 由性质 6 可知: D 为 MN 的中点. 由于直线 AE 为定直线 $l: y = \frac{3}{2}x + 3$, 所以它与 y 轴的交点为定点, 即 $D(0, 3)$.

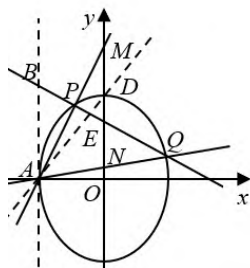


图 1

例 2 (2023 年高考新课标 II 卷第 21 题) 双曲线 C 中心为原点, 左焦点为 $(-2\sqrt{5}, 0)$, 离心率为 $\sqrt{5}$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 记 C 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 , 过点 $(-4, 0)$ 的直线 C 的左支交于 M, N 两点, M 在第二象限, 直线 MA_1 与 NA_2 交于 P , 证明 P 在定直线上.

解 (1) 由题意 $c = 2\sqrt{5}, e = \sqrt{5} = \frac{c}{a}$, 则 $a = 2, b^2 = 16$, 双曲线为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$.

(2) 证明 令 $Q(-4, 0)$,

如图 2, 在 MN 上取 $P_1 \neq Q$ 使得 $M, N; Q, P_1$ 调和, 由性质 5 有 P_1 在 Q 的极线上, 由题知点 Q 的极线 l 为:

$x = -1$, 并且得到调和线束 $PM, PN; PQ, PP_1$, 设

$PP_1 \cap A_1A_2 = P_2$, 则直线 A_1A_2 与 PM, PN, PQ, PP_1 分别交于点 A_1, A_2, Q, P_2 , 即 $A_1, A_2; Q, P_2$ 为调和点列, 又 A_1, A_2 在双曲线 C 上, 所以 Q, P_2 关于双曲线 C 调和共轭, 即 P_2 在 Q 的极线上, 所以, 直线 P_1P_2 就是极线 l , 又因为 $P \in P_1P_2$, 所以点 P 在极线 l 上, 即 $x = -1$ 上.

例 3 (福建省 2023 届适应性试卷第 21 题) 已知圆 $A_1: (x+1)^2 + y^2 = 16$, 直线 l_1 过点 $A_2(1, 0)$ 且与圆 A_1 交于点 B, C , BC 中点为 D , 过 A_2C 中点 E 且平行于 A_1D 的直线交 A_1C 于点 P , 记 P 的轨迹为 Γ .

(1) 求 Γ 的方程;

(2) 坐标原点 O 关于 A_1, A_2 的对称点分别为 B_1, B_2 , 点 A_1, A_2 关于直线 $y = x$ 的对称点分别为 C_1, C_2 , 过 A_1 的直线 l_2 与 Γ 交于点 M, N , 直线 B_1M, B_2N 相交于点 Q . 请从下列结论中, 选择一个正确的结论并给予证明.

① $\triangle QB_1C_1$ 的面积是定值; ② $\triangle QB_1B_2$ 的面积是定值; ③ $\triangle QC_1C_2$ 的面积是定值.

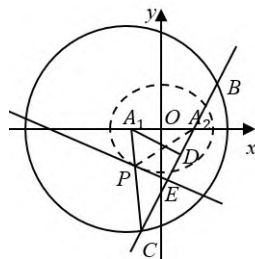


图 3-1

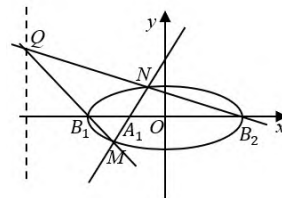


图 3-2

解 (1) 由题意得, $A_1(-1, 0), A_2(1, 0)$. 因为 D 为 BC 中点, 所以 $A_1D \perp BC$, 即 $A_1D \perp A_2C$, 又 $PE // A_1D$, 所以 $PE \perp A_2C$, 又 E 为 A_2C 的中点, 所以 $|PA_2| = |PC|$, 所以

$|PA_1| + |PA_2| = |PA_1| + |PC| = |A_1C| = 4 > |A_1A_2|$, 所以点 P 的轨迹 Γ 是以 A_1, A_2 为焦点的椭圆 (左、右顶点除外). 设 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (x \neq \pm a)$, 其中 $a > b > 0, a^2 - b^2 = c^2$. 则 $2a = 4, a = 2, c = 1, b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{3}$. 故 $\Gamma: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 (x \neq \pm 2)$.

(2) 结论③正确, 下证 ΔQC_1C_2 面积为定值.

证明 因为 B_1, B_2, M, N 都在椭圆 Γ 上, 由题易知 $B_1B_2 \cap MN = A_1, B_1M \cap B_2N = Q$, 则 A_1, Q 关于椭圆 Γ 调和共轭, 即 Q 在点 A_1 的极线上, 又因为极点 A_1 的极线为 $x = -4$, 所以点 Q 在直线 $x = -4$ 上. 所以点 Q 到 C_1C_2 的距离 $d = 4$, 则 $S_{\Delta QC_1C_2} = \frac{1}{2} \times |C_1C_2| \times d = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$.

例 4 (2023 年 5 月福州市高三毕业班质量检测) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右顶点为 A, O 为原点, 点 $P(1, 1)$ 在 C 的渐近线上, ΔPAO 的面积为 $\frac{1}{2}$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 过点 P 作直线 l 交 C 于 M, N 两点, 过点 N 作 x 轴的垂线交直线 AM 于点 G, H 为 NG 的中点, 证明: 直线 AH 的斜率为定值.

解 (1) 因为 $P(1, 1)$ 在 C 的渐近线 $y = \frac{b}{a}x$ 上, 所以 $a = b$, 因为 $A(a, 0)$, 所以 ΔPAO 的面积为 $\frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}$, 解得 $a = 1$, 所以 $b = 1$, 所以 C 的方程为 $x^2 - y^2 = 1$.

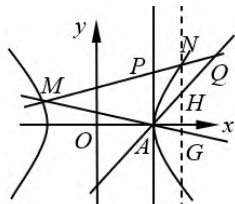


图 4

(2) 在线段 MN 上取点 Q 使得 $\frac{|MQ|}{|QN|} = \frac{|MP|}{|PN|}$, 即 $M, N; P, Q$ 为调和点列, 又 M, N 是曲线 C 上的点, 根据性质 5 可知: P, Q 关于曲线 C 调和共轭, 设 $Q(x_Q, y_Q), P(x_P, y_P)$ 则有 $x_Px_Q - y_Py_Q = 1$, 又 $P(1, 1)$ 代入有 $x_Q - y_Q = 1$. 因为点 $P(1, 1)$ 的极线 $l_1: x - y = 1$, 所以点 Q 在极线 l_1 上, 又因为点 $A(1, 0)$, 所以点 A 也在极线 l_1 上, 即直线 AQ 就是极线 l_1 . 因为 $M, N; P, Q$ 为调和点列, 则 $AM, AN; AP, AQ$ 为调和线束. 又因为 $NH \perp x$ 轴, 由题易知直线 AP 为: $x = 1$, 所以 $NH \parallel AP$, 并且直线 NH 与直线 AN, AQ, AM 分别交于点 N, H, G , 则由性质 6 可知: H 即为线段 NG 的中点. 即中点 H 在直线 AQ 上, 所以直线 AH 即为极线 $l_1: y = x - 1$, 所以直线 AH 的斜率为 1.

例 5 (2022 年高考全国乙卷理科第 20 题) 已知椭圆

圆 E 的中心为坐标原点, 对称轴为 x 轴、 y 轴, 且过 $A(0, -2), B(\frac{3}{2}, -1)$ 两点.

(1) 求 E 的方程;

(2) 设过点 $P(1, -2)$ 的直线交 E 于 M, N 两点, 过 M 且平行于 x 轴的直线与线段 AB 交于点 T , 点 H 满足 $\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{TH}$. 证明: 直线 HN 过定点.

解 (1) 设椭圆 E 的方程为 $mx^2 + ny^2 = 1$, 过 $A(0, -2), B(\frac{3}{2}, -1)$, 则 $4n = 1, \frac{9}{4}m + n = 1$, 解得 $m = \frac{1}{3}, n = \frac{1}{4}$, 所以椭圆 E 的方程为: $\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{3} = 1$.

(2) 定点为 $(0, -2)$, 证明如下:

证明 在线段 MN 上取点 Q 使得 $\frac{|MQ|}{|QN|} = \frac{|MP|}{|PN|}$, 即 $M, N; P, Q$ 为调和点列, 又 M, N 是椭圆 E 上的点, 根据性质 5 可知: P, Q 关于椭圆 E 调和共轭. 设 $Q(x_Q, y_Q), P(x_P, y_P)$ 则有 $\frac{y_Py_Q}{4} + \frac{x_Px_Q}{3} = 1$, 又 $P(1, -2)$ 代入有 $\frac{x_Q}{3} - \frac{y_Q}{2} = 1$, 而直线 $AB: \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1$, 所以 $Q \in AB$, 即 Q 为 AB 与 MN 的交点. 如图 5, 可知 $M, N; P, Q$ 为调和点列, 则 $AM, AN; AP, AQ$ 为调和线束.

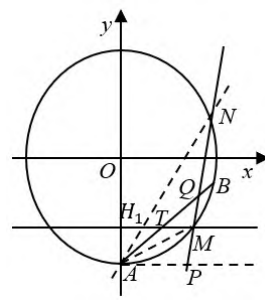


图 5

又根据题意过 M 作 $MT \parallel x$ 轴, 且直线 $AP: y = -2$, 所以 $MT \parallel AP$, 直线 MT 分别与直线 AM, AQ, AN 交于点 M, T, H_1 , 根据性质 6 可知 T 为 MH_1 的中点. 又因为 $\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{TH}$, 所以 T 为 MH 的中点, 即 H 与 H_1 重合, 所以 A, H, N 三点共线, 即直线 HN 必过定点 $A(0, -2)$.

极点极线的问题若只是以高中的角度来看并不是太复杂, 在高中解析几何中即可用来求切线、切点弦方程, 易学易懂. 还可用来确定割线交点的位置, 在处理一些动直线过定点和动点在定直线上时很容易找到答案, 极点极线的应用在高考中出现频率较高, 此处只是将极点极线的性质直接拿来使用, 更多的性质以及性质的证明在大学高等几何中会学到, 此处无需深究.

参考文献

- [1] 林国红. 极点与极线在圆锥曲线中的应用 [J]. 数理化学 (高中版), 2019 (11): 41-44.