



**【解析】** 两图形绕  $y$  轴旋转所得的旋转体夹在两相距为 8 个单位的平行平面之间, 用任意一个与  $y$  轴垂直的平面截这两个旋转体, 设截面与原点距离为  $|y|$ , 所得截面面积

$$S_1 = \pi(4^2 - 4|y|), S_2 = \pi(4^2 - y^2) - \pi[4 - (2 - |y|)^2] = \pi(4^2 - 4|y|)$$

$\therefore S_1 = S_2$ , 由祖暅原理知, 两个几何体体积相等,

$$\therefore F_2 = \frac{1}{2} \times \frac{4\pi}{3} \times (4^3 - 2^3 - 2^3) = \frac{2\pi}{3} \times 48 = 32\pi, \therefore F_1 = 32\pi. \text{ 故选: B}$$

题目来源于泉州市 2013 届高三 3 月质量检查文科数学, 主要考查祖暅原理的应用, 求旋转体的体积的方法, 体现了等价转化、数形结合的数学思想。

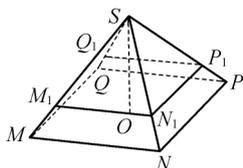
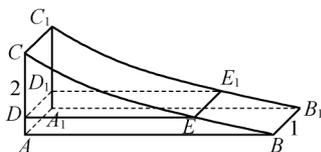
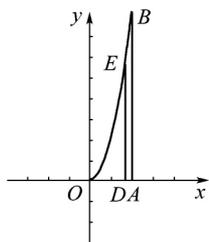
**【例 2】** 求曲线  $y=2x^2$  与  $x$  轴、直线  $x=2$  所围图形的面积:

**【解析】** 将曲边三角形  $ABC$  沿垂直于其所在平面的方向平移一个单位, 得到几何体  $ABC-A_1B_1C_1$ , 为求该几何体构造正四棱锥  $S-MNPO$ , 使得两几何体等高, 底面在同一平面, 且底面积相同, 即  $AC=OS=2, S_{MNPQ}=8$ 。用平行于底面  $ABB_1A_1$  的截面去截它们, 分别得到矩形  $DEE_1D_1$  和矩形  $M_1N_1P_1Q_1$ , 设它们距  $CC_1, S$  所在平面的距离为  $x_0$ , 显然  $S_{DEE_1D_1}=2x_0^2$ , 而

$$S_{M_1N_1P_1Q_1} = \frac{x_0^2}{4} S_{MNPQ} = 2x_0^2, \text{ 由祖暅原理知}$$

$$V_{ABC-A_1B_1C_1} = S_{MNPQ} = \frac{16}{3},$$

$$S_{ABC} = \frac{V_{ABC-A_1B_1C_1}}{AA_1} = \frac{16}{3}.$$



此题若用定积分知识也可容易求出所围图形的面积。笔者提供的这种解法把“非标准”平面图形通过空间平移转化为“非标准”几何体, 通过祖暅原理求出该几何体的体积, 然后由体积公式求出该平面图形面积。这种构造思想不仅可以用来求曲边三角形的面积, 也可以应用于一些其他平面图形的面积。

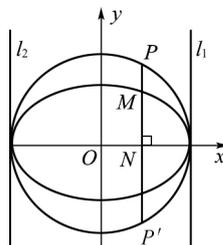
**【例 3】** 求椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的面积;

解: 圆  $O$  的方程为  $x'^2 + y'^2 = a^2 (a > 0)$ , 作沿平行于  $y$

轴方向的均匀压缩变换  $\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{a}{b}y \end{cases}$ , 代入圆  $O$  的方程就得椭圆方程。

由于椭圆与圆都夹在两条平行线  $l_1$  与  $l_2$  之间, 且  $PP' \parallel l_1 \parallel l_2$ , 利用“祖暅原理”推论 2 得  $\frac{S_{\text{椭圆}}}{S_{\text{圆}}} = \frac{2|MN|}{2|PN|} = \frac{y}{y'}$

$\frac{b}{a}$ , 所以  $S_{\text{椭圆}} = S_{\text{圆}} \cdot \frac{b}{a} = \pi a^2 \cdot \frac{b}{a} = \pi ab$ 。



圆是同学们熟悉的平面图形, 其面积公式大家耳熟能详, 但对于椭圆的面积公式, 书本并未给出。利用“祖暅原理”推论将椭圆的面积与圆的面积公式联系起来, 很容易可以求出椭圆的面积, 在整个过程中, 有效激发了学生探究的精神。

在高中数学课堂渗透中国数学史, 让广大中学教师有力把握中国数学史在高中数学中的重要地位及其作用, 有利于数学老师更加全面、更加深刻地理解数学, 提高他们的专业水平及素养, 进而提升教学能力; 同时有助于活跃数学课堂气氛, 使数学教学更加高效, 对日常的数学教学起到十分积极的作用。从而, 也可以调动学生学习数学的积极性, 激发学习兴趣, 加深学生对数学本质的理解; 有利于学生系统地掌握数学知识, 扩大知识面和视野; 有助于培养学生的创新能力, 培养学生爱国主义热情, 有效地体现数学的文化价值。

参考文献:

[1] 叶秀云, 叶雪梅. “祖暅原理”及其教学探究[J]. 福建中学数学, 2012.  
 [2] 王威. 巧用祖暅原理及其推论推导旋转体的体积[J]. 语数外学习, 2013.  
 [3] 朱田晟. 渗透数学史料, 弘扬传统文化[J]. 考试周刊, 2016.  
 [4] 胡娟娟. 用祖暅原理求平面图形的面积[J]. 数学教学通讯.  
 [5] 夏军剑. 祖暅原理的推广及应用[J]. 中学数学杂志, 2006.  
 [6] 宋丹, 庄建宏. 运用祖暅原理求任意椭圆之体积—中国数学史中一个成就的应用[J]. 辽宁省交通高等专科学校学报, 2002.  
 [7] 张伟. 祖暅原理的由来及证明[J]. 重庆教育学院学报, 2010.