

$$\begin{cases} x_1 + \lambda x_2 = x_P(1 + \lambda) \\ x_1 - \lambda x_2 = x_Q(1 - \lambda) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{x_P + x_Q}{2} + \frac{x_P - x_Q}{2} \cdot \lambda, \\ x_2 = \frac{x_P + x_Q}{2} + \frac{x_P - x_Q}{2\lambda}. \end{cases}$$

注意:在圆锥曲线问题中,当两条弦所在直线的公共点在坐标轴上时,运用常规解法非常繁琐,若将坐标变换成比值,则往往会事半功倍.

例6 (2018·北京卷)已知椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 焦距为 $2\sqrt{2}$, 斜率为 k 的直线 l 与椭圆 M 有两个不同的交点 A, B .

(1) 求椭圆 M 的方程;

(2) 若 $k=1$, 求 $|AB|$ 的最大值;

(3) 设 $P(-2, 0)$, 直线 PA 与椭圆 M 的另一个交点为 C , 直线 PB 与椭圆 M 的另一个交点为 D , 若 C, D 和点 $Q(-\frac{7}{4}, \frac{1}{4})$ 共线, 求 k .

解析: (1) $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$; (2) $\sqrt{6}$ (过程略).

(3) 设点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$, 同时设 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{BP} = \mu \overrightarrow{PD}$, 则可得 $x_P = \frac{x_1 + \lambda x_3}{1 + \lambda} = \frac{x_2 + \mu x_4}{1 + \mu} = -2, y_P = \frac{y_1 + \lambda y_3}{1 + \lambda} = \frac{y_2 + \mu y_4}{1 + \mu} = 0$.

由点 A, C 在椭圆上得 $\frac{x_1^2}{3} + y_1^2 = 1, \frac{\lambda^2 x_3^2}{3} + \lambda^2 y_3^2 = \lambda^2$, 两式作差得 $\frac{(x_1 + \lambda x_3)(x_1 - \lambda x_3)}{3(1 - \lambda^2)} + \frac{(y_1 + \lambda y_3)(y_1 - \lambda y_3)}{1 - \lambda^2} = 1$, 即 $\frac{(-2)(x_1 - \lambda x_3)}{3(1 - \lambda)} = 1$,

亦即 $\frac{x_1 - \lambda x_3}{1 - \lambda} = -\frac{3}{2}$. 于是, 解方程组

$$\begin{cases} \frac{x_1 - \lambda x_3}{1 - \lambda} = -\frac{3}{2}, \\ \frac{x_1 + \lambda x_3}{1 + \lambda} = -2, \end{cases} \text{ 可得 } \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{4}\lambda - \frac{7}{4}, \\ x_3 = -\frac{1}{4\lambda} - \frac{7}{4}. \end{cases}$$

$$\text{同理, 可得 } \begin{cases} x_2 = -\frac{1}{4}\mu - \frac{7}{4}, \\ x_4 = -\frac{1}{4\mu} - \frac{7}{4}. \end{cases} \text{ 从而, } x_1 - x_2 =$$

$-\frac{1}{4}(\lambda - \mu)$ ⑦. 因为易知 $y_3 = -\frac{y_1}{\lambda}, y_4 = -\frac{y_2}{\mu}$, 又由

C, D 和点 $Q(-\frac{7}{4}, \frac{1}{4})$ 共线得 $k_{CQ} = k_{DQ}$, 所以 $\frac{y_3 - \frac{1}{4}}{x_3 + \frac{7}{4}} = \frac{y_4 - \frac{1}{4}}{x_4 + \frac{7}{4}}$

$$= \frac{y_4 - \frac{1}{4}}{x_4 + \frac{7}{4}}, \text{ 即 } \frac{-\frac{y_1}{\lambda} - \frac{1}{4}}{-\frac{1}{4\lambda}} = \frac{-\frac{y_2}{\mu} - \frac{1}{4}}{-\frac{1}{4\mu}}, \text{ 化简得 } y_1 - y_2 =$$

$-\frac{1}{4}(\lambda - \mu)$ ⑧. 从而, 根据 ⑦⑧ 即得 $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 1$, 故所求 $k=1$.

评注:上述求解关键是先两次活用“定比分点差法”可得 ⑦ 式, 再将三点共线转化为直线的斜率相等可得 ⑧ 式. 显然, 第三问涉及字母形式的化简、运算量较大, 需要特别认真、细心一些.

总之, 结合上述归类解析可知, 灵活运用“定比分点差法”可迅速分析、解决圆锥曲线中有关涉及线段定比分点问题, 其优点是技巧性的规律较强, 有利于减少化简、运算量, 从而提高解题的速度与准确性.

圆锥曲线内接四边形的又一个新性质

湖北省大冶市第一中学 (435100) 徐国辉 舒红霞

文[1]给出了圆锥曲线内接四边形如下的新性质.

性质1 已知四边形 $ABCD$ 是抛物线 $y^2 = 2px$ 的内接四边形, 则 $k_{AB} + k_{CD} = 0 \Leftrightarrow k_{BC} + k_{DA} = 0 \Leftrightarrow k_{AC} + k_{BD} = 0$.

性质2 已知四边形 $ABCD$ 是圆锥曲线 $mx^2 + ny^2 = 1 (mn \neq 0)$ 的内接四边形, 则 $k_{AB} + k_{CD} = 0 \Leftrightarrow k_{BC} + k_{DA} = 0 \Leftrightarrow k_{AC} + k_{BD} = 0$.

文[2]给出了性质1与性质2的简单证明及圆

锥曲线内接四边形的一个类似性质. 笔者经过探究, 发现了圆锥曲线内接四边形的又一个新性质.

性质3 已知四边形 $ABCD$ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

($a > 0, b > 0$) 的内接四边形, 则 $k_{AB} k_{CD} = \frac{b^2}{a^2} \Leftrightarrow k_{BC} k_{DA}$

$$= \frac{b^2}{a^2} \Leftrightarrow k_{AC} k_{BD} = \frac{b^2}{a^2}; \text{ 若四边形 } ABCD \text{ 是双曲线 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

$= 1 (a > 0, b > 0)$ 的内接四边形, 则 $k_{AB} k_{CD} = -\frac{b^2}{a^2} \Leftrightarrow$

$$k_{BC}k_{DA} = -\frac{b^2}{a^2} \Leftrightarrow k_{AC}k_{BD} = -\frac{b^2}{a^2}.$$

证明: 设四边形 $ABCD$ 是圆锥曲线 $mx^2 + ny^2 = 1$ ($mn \neq 0$) 的内接四边形, 设直线 AB, CD 的方程分别为 $y = k_1x + b_1, y = k_2x + b_2$, 直线 AC, BD 的方程分别为 $y = k_3x + b_3$ 和 $y = k_4x + b_4$, 则 A, B, C, D 同在由 AB, CD 生成的二次曲线 $(y - k_1x - b_1)(y - k_2x - b_2) = 0$ 和由 AC, BD 生成的二次曲线 $(y - k_3x - b_3) \cdot (y - k_4x - b_4) = 0$ 上, 又因 A, B, C, D 是圆锥曲线 $mx^2 + ny^2 = 1$ ($mn \neq 0$) 上的四点, 因而存在 μ, ν ($\mu \neq 0, \nu \neq 0$), 使得 $\mu(y - k_1x - b_1)(y - k_2x - b_2) + \nu(y - k_3x - b_3)(y - k_4x - b_4) = mx^2 + ny^2 - 1$.

$$\text{比较 } x^2, y^2 \text{ 的系数, 得 } \begin{cases} \mu + \nu = n, \\ \mu k_1 k_2 + \nu k_3 k_4 = m. \end{cases} \quad (1)$$

当 $m = \frac{1}{a^2}, n = \frac{1}{b^2}$ 时, 若 $k_1 k_2 = \frac{b^2}{a^2}$, 则 $nk_1 k_2 = m$,

代入①式可得 $k_3 k_4 = k_1 k_2$, 即 $k_{AB}k_{CD} = \frac{b^2}{a^2} \Leftrightarrow k_{AC}k_{BD} = \frac{b^2}{a^2}$, 同理可证 $k_{AB}k_{CD} = \frac{b^2}{a^2} \Leftrightarrow k_{BC}k_{DA} = \frac{b^2}{a^2}$. 从而有 $k_{AB}k_{CD} = \frac{b^2}{a^2} \Leftrightarrow k_{BC}k_{DA} = \frac{b^2}{a^2} \Leftrightarrow k_{AC}k_{BD} = \frac{b^2}{a^2}$.

当 $m = \frac{1}{a^2}, n = -\frac{1}{b^2}$ 时, 若 $k_1 k_2 = -\frac{b^2}{a^2}$, 则 $nk_1 k_2 = m$, 代入①式可得 $k_3 k_4 = k_1 k_2$, 即 $k_{AB}k_{CD} = -\frac{b^2}{a^2} \Leftrightarrow k_{AC}k_{BD} = -\frac{b^2}{a^2}$, 同理可证 $k_{AB}k_{CD} = -\frac{b^2}{a^2} \Leftrightarrow k_{BC}k_{DA} = -\frac{b^2}{a^2}$. 从而有 $k_{AB}k_{CD} = -\frac{b^2}{a^2} \Leftrightarrow k_{BC}k_{DA} = -\frac{b^2}{a^2} \Leftrightarrow k_{AC}k_{BD} = -\frac{b^2}{a^2}$.

说明: 在性质 3 中, 当 $k_{AB}k_{CD} = \pm \frac{b^2}{a^2}$ 时, 如果有一条边的斜率不存在, 则对边的斜率必为 0, 比如直线 AC 的斜率不存在, 此时有 $k_{BD} = 0$.

在性质 3 中, 当四边形退化为三角形时有如下性质.

性质 4 已知点 $P(x_0, y_0)$ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 上异于顶点的任意一点, (1) 过点 $P(x_0,$

$y_0)$ 作倾斜角互补的两条直线交椭圆于 A, B 两点, 则 $k_{OP}k_{AB} = \frac{b^2}{a^2}$; (2) 过点 $P(x_0, y_0)$ 作斜率乘积为 $\frac{b^2}{a^2}$ 两条直线交椭圆于 A, B 两点, 则 $k_{OP} + k_{AB} = 0$.

性质 5 已知点 $P(x_0, y_0)$ 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 上异于顶点的任意一点, (1) 过点 $P(x_0, y_0)$ 作倾斜角互补的两条直线交双曲线于 A, B 两点, 则 $k_{OP}k_{AB} = -\frac{b^2}{a^2}$; (2) 过点 $P(x_0, y_0)$ 作斜率乘积为 $-\frac{b^2}{a^2}$ 两条直线交双曲线于 A, B 两点, 则 $k_{OP} + k_{AB} = 0$.

限于篇幅只证明性质 5(2).

证明: 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 由 $\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \\ \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 1, \end{cases}$ 可

得 $\frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{a^2} - \frac{(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)}{b^2} = 0$, 即 $k_{AB} =$

$\frac{b^2 x_1 + x_2}{a^2 y_1 + y_2}$, 同理可得 $k_{AP} = \frac{b^2 x_0 + x_1}{a^2 y_0 + y_1}, k_{BP} = \frac{b^2 x_0 + x_2}{a^2 y_0 + y_2}$.

$\therefore k_{AP} \cdot k_{BP} = -\frac{b^2}{a^2}, \therefore \frac{b^2 x_0 + x_1}{a^2 y_0 + y_1} \cdot \frac{b^2 x_0 + x_2}{a^2 y_0 + y_2} = -\frac{b^2}{a^2}$, 又

由斜率公式得 $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} = -\frac{b^2}{a^2}$, 所以 $\frac{x_0 + x_1}{y_0 + y_1} \cdot$

$\frac{x_0 + x_2}{y_0 + y_2} = -\frac{a^2}{b^2} = \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} \cdot \frac{x_2 - x_0}{y_2 - y_0}$, 上式化简得 $-\frac{a^2}{b^2} =$

$\frac{(x_1 + x_2)x_0}{(y_1 + y_2)y_0}$, 即 $k_{AB} = \frac{b^2 x_1 + x_2}{a^2 y_1 + y_2} = -\frac{y_0}{x_0} = -k_{OP}$, 所以

$k_{OP} + k_{AB} = 0$.

参考文献

- [1] 朱凤娣. 圆锥曲线内接四边形的一个有趣性质[J]. 中学数学研究(江西师大), 2011(1).
- [2] 舒金根. 圆锥曲线内接四边形的一个有趣新性质的简证及类似[J]. 中学数学研究(江西师大), 2011(5).