doi:10.3969/j.issn.1008-1399.2023.05.005

两组九大类易混极限题的讨论

成立花，韩 玥
（西安工程大学 理学院，陕西 西安 710048）

摘　要　借助定积分定义和夹逼准则，给出两组九大类易混极限题的讨论，进而分类讲解，更易为学生所接受.

关键词　极限；夹逼准则；极限未定式

中图分类号　O13　　**文献标识码**　A　　**文章编号**　1008-1399(2023)05-0012-03

On Two Groups of Nine Types of Easily Confusing Limit Problems

CHENG Lihua and HAN Yue
(School of Science, Xi'an Polytechnic University, Xi'an 710048, China)

Abstract　Two groups of nine types of easily confusing limit problems are discussed by using the definition of definite integral and squeeze theorem, and the classifications of them are given, which can be accepted by students more easily.

Keywords　limit, squeeze theorem, undetermined form

1　引言

极限是《数学分析》和《高等数学》的重要概念之一，极限思想是微积分的灵魂. 因此理解和掌握数列极限的解法极其重要. 数列极限的求解方法很多，定义法、四则运算、等价无穷小替换、两个重要极限、单调有界原理、夹逼准则、定积分定义等等[1-3]. 不同类型的极限题有不同的解决方法，有的类型可能不止有一种解决方法，相反，有的极限题可能解决方法是唯一的，稍有差池可能就会得到相反的结论. 因此，对于较为复杂的数列极限，选择合适的求解方法显得尤为重要. 这需要对所求解的极限结构具有很好的分析和把控. 本文从两组几个大类相似的数列极限着手，给出相应的结构分析求解方法，以期同学对这类数列极限的求解有所掌握和理解，进而将知识点融会贯通.

总所周知，有限个无穷小的和还是无穷小，那么无穷多个无穷小的和呢？这个答案是不一定的，我们把这类的极限称之为未定式. 一般的，这类极限题不能直接利用极限的四则运算法则，是需要转换其他的思考途径来处理这一类问题.

我们先看两组九大类易混的数列极限，初学的学生可能会感觉是一类题，甚至于有的老师也会误判. 见到这一类题目，要仔细的分析，观察他的结构，思考可能的解法，给出正确的分析. 两组数列极限都是分式部分和的形式.

第一组的数列极限与无理根式函数有关.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}\right)$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$.

第二组极限的求解则来自于有理分式函数的部分和极限.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n\pi}\right)$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$.

收稿日期：2022-04-22　　**修改日期**：2023-06-08
基金项目：西安工程大学数学分析教改项目(01).
作者简介：成立花(1973－)，女，陕西西安，硕士，副教授，研究方向算子理论与泛函分析，Email:178529238@qq.com.

7.（2017 年江苏省高数竞赛本科一级）

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3+1^2}+\frac{2^2}{n^3+2^2}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n^2}\right).$$

8. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{2}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right).$$

9. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3+1^3}+\frac{2^2}{n^3+2^3}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n^3}\right).$$

2　主要方法和证明

第一组极限的特征是这样的，尽管其每一项都是无理根式，但其通项公式都是不一样的，并且部分和的项数多少也是不尽相同的. 极限 1 和极限 2 的通项公式是一样的，只是项数不同而已，极限 1 和极限 3 的项数一样，通项公式不一样的. 极限 1，2 是典型的夹逼准则做法.

1 解　由于 $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+i}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$，$i=1,\cdots,n$，故

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

因此，由夹逼准则可以得到

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

极限 2 的项数较多，有 $2n+1$ 项，但其做法和极限 1 是类似的.

2 解　由于 $\frac{1}{\sqrt{n^2+2n+1}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+i}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$，$i=1,\cdots,2n+1$，故

$$\frac{2n+1}{\sqrt{n^2+2n+1}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n+1}}\leqslant\frac{2n+1}{\sqrt{n^2+1}},$$

因此，由夹逼准则可以得到

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}\right)=2.$$

极限 1、2 项数分别为 n，$2n+1$，这两类极限更为一般的推广形式为：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+kn+l}}\right),$$

其中 $k\in N$，$l\in Z$. 经过类似的计算可以得其极限为 k.

再看极限 3，根号下方是两项的平方和形式，此处夹逼准则的放缩法不再适用，此时，利用定积分的定义来处理极限.

3 解　由于

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}}+\frac{1}{n\sqrt{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\cdots+\frac{1}{n\sqrt{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x,$$

故对上式积分即可，因此

$$\text{原式}=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^1=\ln\left(\sqrt{2}+1\right).$$

第二组极限题的每一项都是有理分式，同第一组相同的是，其通项公式也都是不一样的，部分和的项数多少也是不相同. 有了第一组极限例题的铺垫，第二组相对就好分析一些. 我们先给出基础极限 4.，然后在极限 4 的基础上讨论其他极限. 极限 4 的项数有 n 项，同极限 1，2 一样，两边适当放缩，使用夹逼准则来计算.

4 解　由于

$\frac{1}{n^2+\pi}\geqslant\frac{1}{n^2+i\pi}\geqslant\frac{1}{n^2+n\pi}$，$i=1,\cdots,n$，故

$$n\frac{n}{n^2+n\pi}\leqslant n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)\leqslant n\frac{n}{n^2+\pi},$$

因此，由夹逼准则，两边同时取极限可以得到

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)=1.$$

第 4 类极限的一般形式为

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{n^2+k+l}+\frac{1}{n^2+2k+l}+\cdots+\frac{1}{n^2+nk+l}\right),$$

其中 $k\in N$，$l\in Z$. 经过定积分定义法计算可得到极限为 1.

极限 5 是在极限 4 的基础上做了修改，将左侧的系数 n 修改为每一项中的自然数列. 此题在使用夹逼准则时，注意适当放缩，只放缩分母，同时还需要使用等差数列的求和公式来计算.

5 解　由于 $\frac{i}{n^2+n}\leqslant\frac{i}{n^2+i}\leqslant\frac{i}{n^2+1}$，$i=1,\cdots,n$，故

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n}\leqslant\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\leqslant\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+1}.$$

因此，由夹逼准则，两边同时取极限可以得到

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)=\frac{1}{2}.$$

极限6和极限5的差异仅仅在分母，解法几乎不变.

6 解 由于

$$\frac{i}{n^2+n+n}\leqslant\frac{i}{n^2+n+i}\leqslant\frac{i}{n^2+n+1},i=1,\cdots,n,$$

故
$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}\leqslant\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\leqslant\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}.$$

因此，由夹逼准则，两边同时取极限可以得到

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=\frac{1}{2}.$$

极限5、6更为一般的形式为

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+kn+1}+\frac{2}{n^2+kn+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+kn+n}\right),$$

其中 $k\in N$，经计算得知，极限保持不变，仍为$\frac{1}{2}$.

在前方多个类型极限的基础上，再进行适当的四则运算的调整和放缩，竞赛题极限7也就迎刃而解.

7 解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3+1^2}+\frac{2^2}{n^3+2^2}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n^2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3}\cdot\frac{n^3}{n^3+1^2}+\frac{2^2}{n^3}\cdot\frac{n^3}{n^3+2^2}+\cdots+\frac{n^2}{n^3}\cdot\frac{n^3}{n^3+n^2}\right)$$

且由于$\frac{i^2}{n^3}\cdot\frac{n^3}{n^3+1^2}\geqslant\frac{i^2}{n^3}\cdot\frac{n^3}{n^3+i^2}\geqslant\frac{i^2}{n^3}\cdot\frac{n^3}{n^3+n^2}$，$i=1,\cdots,n$，故有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^3}\cdot\frac{n^3}{n^3+n^2}\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^3}\frac{n^3}{n^3+i^2}\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^3}\cdot\frac{n^3}{n^3+1^2},$$

又因为

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n-1)}{6n^3}=\frac{1}{3},$$

因此，原式极限为$\frac{1}{3}$.

这类极限可以推广至更一般的如下形式，且极限保持不变.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3+(nk+l)+1^2}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+(nk+l)+n^2}\right),$$

其中 $k,l\in N$.

同前面极限相比，极限8,9的分母分别为平方和、立方和形式，分子分别为1、2次的形式. 此时如果贸然使用夹逼准则，可能会出项放缩后的左右两侧极限不一样. 因此这类习题更多考虑定积分的定义，参考极限3.

8 解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{2}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+i^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}$$
$$=\frac{1}{n}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n}}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2},$$

此时，就可以对上式做类似于极限2的定积分定义法来处理

$$\text{原式}=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln 2.$$

9 解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3+1^3}+\frac{2^2}{n^3+2^3}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n^3}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^3}+\frac{\left(\frac{2}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^3}+\cdots+\frac{\left(\frac{n}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^3}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\frac{i}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^3}$$
$$=\int_0^1\frac{x^2}{1+x^3}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{3}\ln(1+x^3)\Big|_0^1=\frac{1}{3}\ln 2.$$

极限8、9是不可以使用夹逼准则来处理的.

3 总结

通过以上两组九大类例题可以看出，求解数列的极限，方法不能局限于其中的一种，无论使用夹逼准则还是极限定义法，亦或是定积分定义法等等方法，都需要注意对数列的结构有充分的认知，否则可能会得出错误的极限，此时就需要同学多做题，多体会，多分析，多总结.

参考文献

[1] 同济大学数学教研室. 高等数学(上册)[M]. 6版. 北京：高等教育出版社，2007：14－52.

[2] 华东师范大学数学系. 数学分析(上册)[M]. 4版. 北京：高等教育出版社. 2010. 23－42.

[3] 吴赣昌. 微积分经管类(上册)[M]. 5版. 北京：中国人民大学出版社，2017：11－35.