递推关系 $a_{n+1}=qa_n+p$ 在概率中的应用举例

江苏　郭建华

数列中连续两项的递推关系 $a_{n+1}=qa_n+p$（其中 p,q 为常数，$pq\neq 0,q\neq 1$）是一种常用的数学模型. 该模型在概率中也有着其独特的用法，常常以选择题的形式出现，其综合性强，求解难度较大，重点考查化归与转化，分类讨论等数学思想. 对于选择题，可以从选项的描述中获取解题思路，也可以先从特殊化入手，再研究其一般情况，即先猜后证（利用数学归纳法证明），最后结合求数列的通项公式的手段和方法求解.

递推关系 $a_{n+1}=qa_n+p$（其中 p,q 为常数，$pq\neq 0$，$q\neq 1$）可以通过待定系数法将其转化为新的等比数列. 其证法如下：令 $a_{n+1}+t=q(a_n+t)$，则 $a_{n+1}=qa_n+(q-1)t$，又 $a_{n+1}=qa_n+p$，故 $t=\frac{p}{q-1}$，即 $a_{n+1}+\frac{p}{q-1}=q\left(a_n+\frac{p}{q-1}\right)$，$a_1\neq -\frac{p}{q-1}$，故数列 $\left\{a_n+\frac{p}{q-1}\right\}$ 是以 $a_1+\frac{p}{q-1}$ 为首项，q 为公比的等比数列. 只要给定 a_1，便可以求其通项公式.

下面，通过两道多项选择题谈谈 $a_{n+1}=qa_n+p$ 在概率中的应用.

1. 摸球问题

【例 1】甲口袋中装有 2 个黑球和 1 个白球，乙口袋中装有 3 个白球. 现从甲、乙两口袋中各任取一个球交换放入另一口袋，重复 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 次这样的操作，记甲口袋中黑球个数为 X_n，恰有 2 个黑球的概率为 p_n，恰有 1 个黑球的概率为 q_n，则下列结论正确的是（　　）

A. $p_2=\frac{16}{27}$，$q_2=\frac{7}{27}$

B. 数列 $\{2p_n+q_n-1\}$ 是等比数列

C. X_n 的数学期望 $E(X_n)=1+\left(\frac{1}{3}\right)^n(n\in\mathbf{N}^*)$

D. 数列 $\{p_n\}$ 的通项公式为 $p_n=\frac{3}{10}\left(-\frac{1}{9}\right)^n-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{5}(n\in\mathbf{N}^*)$

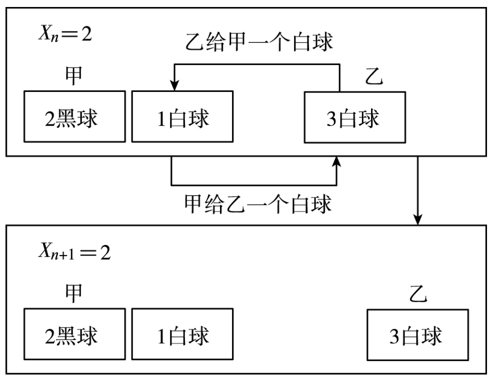
【解析】重复 n 次这样的操作，记甲口袋的黑球个数为 X_n，其取值为 0，1，2，恰有 2 个黑球的概率为 p_n，恰有 1 个黑球的概率为 q_n，此时，甲口袋的球为以下三种情况之一，即 2 个黑球和 1 个白球，1 个黑球和 2 个白球，3 个白球和 0 个黑球，所对应的概率分别为 $p_n,q_n,1-p_n-q_n$.

从甲、乙两口袋中各任取一个球交换放入另一口袋为一次操作.

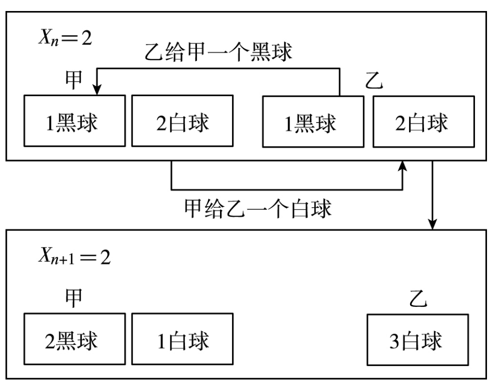
（1）若重复 $(n+1)$ 次这样的操作，甲口袋中黑球个数 X_{n+1} 恰好为 2，即甲口袋装有 2 个黑球和 1 个白球，则重复 n 次这样的操作时，甲口袋中黑球的个数 X_n 为 1 或 2，包含以下两个互斥事件，即

①当 $X_n=2$ 时，此时，甲口袋装有 2 个黑球和 1 个白球，乙口袋装有 3 个白球，进行一次操作（甲给乙一个白球，同时乙给甲一个白球）后 $X_{n+1}=2$，于是甲口袋装有 2 个黑球和 1 个白球，乙口袋装有 3 个白球，其交换过程如图所示：

因此，这种情形发生的概率为 $\frac{C_1^1}{C_3^1}\cdot\frac{C_3^1}{C_3^1}\cdot p_n$；



②当 $X_n=1$ 时，此时，甲口袋装有 1 个黑球和 2 个白球，乙口袋装有 1 个黑球和 2 个白球，进行一次操作（甲给乙一个白球，同时乙给甲一个黑球）后 $X_{n+1}=2$，其交换过程如图所示：



因此,这种情形发生的概率为$\frac{C_2^1}{C_3^1}\cdot\frac{C_1^1}{C_3^1}\cdot q_n$;

所以,$p_{n+1}=\frac{C_1^1}{C_3^1}\cdot\frac{C_3^1}{C_3^1}\cdot p_n+\frac{C_2^1}{C_3^1}\cdot\frac{C_1^1}{C_3^1}\cdot q_n=\frac{1}{3}p_n+\frac{2}{9}q_n$,

即 $p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{2}{9}q_n$ ①.

(2)若重复$(n+1)$次这样的操作,甲口袋中黑球个数X_{n+1}恰好为1,此时,甲口袋装有1个黑球和2个白球,则重复n次这样的操作时,甲口袋中黑球的个数X_n为0,1或2,包含以下三个互斥事件,即

①当$X_n=2$时,此时,甲口袋装有2个黑球和1个白球,乙口袋装有3个白球,进行一次操作(甲给乙一个黑球,同时,乙给甲一个白球)后$X_{n+1}=1$,即甲口袋装有1个黑球和2个白球,乙口袋也装有1个黑球和2个白球,(交换过程的图略),因此,这种情形发生的概率为$\frac{C_2^1}{C_3^1}\cdot\frac{C_3^1}{C_3^1}\cdot p_n$;

②当$X_n=1$时,此时,甲口袋装有1个黑球和2个白球,乙口袋也装有1个黑球和2个白球,进行一次操作(甲给乙一个白球,同时,乙给甲一个白球,或者甲给乙一个黑球,同时,乙给甲一个黑球)后$X_{n+1}=1$,即甲口袋仍然装有1个黑球和2个白球,乙口袋也装有1个黑球和2个白球,(交换过程的图略),因此,这种情形发生的概率为$\left(\frac{C_2^1}{C_3^1}\cdot\frac{C_2^1}{C_3^1}+\frac{C_1^1}{C_3^1}\cdot\frac{C_1^1}{C_3^1}\right)\cdot q_n$;

③当$X_n=0$时,此时,甲口袋装3个白球,乙口袋装有2个黑球和1个白球,进行一次操作(甲给乙一个白球,同时,乙给甲一个黑球)后$X_{n+1}=1$,即甲口袋装有1个黑球和2个白球,乙口袋也装有1个黑球和2个白球(交换过程的图略),因此,这种情形发生的概率为$\frac{C_3^1}{C_3^1}\cdot\frac{C_2^1}{C_3^1}\cdot(1-p_n-q_n)$.

所以$q_{n+1}=\frac{C_2^1}{C_3^1}\cdot\frac{C_3^1}{C_3^1}\cdot p_n+\left(\frac{C_2^1}{C_3^1}\cdot\frac{C_2^1}{C_3^1}+\frac{C_1^1}{C_3^1}\cdot\frac{C_1^1}{C_3^1}\right)\cdot q_n+\frac{C_3^1}{C_3^1}\cdot\frac{C_2^1}{C_3^1}\cdot(1-p_n-q_n)=-\frac{1}{9}q_n+\frac{2}{3}$,

即$q_{n+1}=-\frac{1}{9}q_n+\frac{2}{3}$ ②,

由$2\times$①+②得,$2p_{n+1}+q_{n+1}=\frac{2}{3}p_n+\frac{1}{3}q_n+\frac{2}{3}$,

所以$2p_{n+1}+q_{n+1}-1=\frac{2}{3}p_n+\frac{1}{3}q_n-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}(2p_n+q_n-1)$,

当$n=1$时,得$p_1=\frac{C_1^1}{C_3^1}\cdot\frac{C_3^1}{C_3^1}=\frac{1}{3}$,$q_1=\frac{C_2^1}{C_3^1}\cdot\frac{C_3^1}{C_3^1}=\frac{2}{3}$,故$2p_1+q_1-1=\frac{1}{3}$,

所以$\{2p_n+q_n-1\}$是首项为$\frac{1}{3}$,公比为$\frac{1}{3}$的等比数列,故B正确;

由$2p_n+q_n-1=\left(\frac{1}{3}\right)^n$,得$2p_n+q_n=1+\left(\frac{1}{3}\right)^n$,

由②知,得$q_{n+1}-\frac{3}{5}=-\frac{1}{9}\left(q_n-\frac{3}{5}\right)$,

又$q_1=\frac{2}{3}$,故$q_n=\frac{1}{15}\left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1}+\frac{3}{5}$,

所以$p_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n-\frac{1}{2}q_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{15}\left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1}+\frac{3}{5}\right]=\frac{3}{10}\left(-\frac{1}{9}\right)^n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{5}$,

故选项D错误;

X_n的概率分布为

X_n	0	1	2
P	$1-p_n-q_n$	q_n	p_n

故$E(X_n)=1\times q_n+2\times p_n=1+\left(\frac{1}{3}\right)^n(n\in\mathbf{N}^*)$,故选项C正确;

当$n=2$时,得$p_2=\frac{C_1^1}{C_3^1}\cdot\frac{C_3^1}{C_3^1}\cdot p_1+\frac{C_2^1}{C_3^1}\cdot\frac{C_1^1}{C_3^1}\cdot q_1=\frac{7}{27}$,

$q_2=\frac{C_2^1}{C_3^1}\cdot\frac{C_3^1}{C_3^1}\cdot p_1+\left(\frac{C_2^1}{C_3^1}\cdot\frac{C_2^1}{C_3^1}+\frac{C_1^1}{C_3^1}\cdot\frac{C_1^1}{C_3^1}\right)\cdot q_1+\frac{C_3^1}{C_3^1}\cdot\frac{C_2^1}{C_3^1}\cdot(1-p_1-q_1)=\frac{16}{27}$,故选项A错误.故选BC.

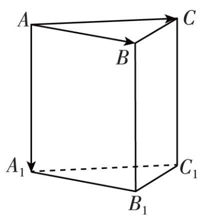
【评注】四个选项的形式多样,考查了概率和数列的重要知识点,达到了交汇考查的目的.从选项中可以猜想p_n与q_n之间存在一定的联系.如何厘清它们之间的关联,就要分析从第$(n-1)$次操作到第n次操作会产生怎样的变化.为了将抽象的问题具体化,更易于学生理解,把从第$(n-1)$次的操作到第n次的操作过程采取思维导图的形式呈现,即采取先一般化再研究特殊化的问题探究方式.也可以从特殊化入手,寻找概率变化的规律,进而猜想p_n与q_n的一般化形式,再结合概率的知识求解.另外,学生还要熟练掌握具有递推关系$a_{n+1}=qa_n+p$(其中p,q为常数,$pq\neq0,q\neq1$)的数列的通项的求法,再结合数列的知识求解.

2. 爬行问题

【例 2】设一个正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，如图，每条棱长都相等，一只蚂蚁从上底面 ABC 的某顶点出发，每次只沿着棱爬行并爬到另一个顶点，算一次爬行. 若它选择三个方向爬行的概率相等，当蚂蚁爬行 n 次，仍然在上底面的概率记为 P_n，则下列选项正确的是　　(　　)

A. $P_1=\frac{2}{3}$　　　　B. $P_2>P_1$

C. $P_n=\frac{1}{3}P_{n-1}+\frac{1}{3}$　　　　D. $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{4P_i-1}>\frac{n^2}{n+1}$



【解析】若蚂蚁爬行 n 次时，仍然在上底面的概率记为 P_n，则蚂蚁爬行 $(n-1)$ 次时，仍然在上底面的概率记为 P_{n-1}. P_n 的大小决定于以下两个互斥事件，即

(1) 若上一步在上底面，再走一步要想不掉下去，只有两条路，其概率为 $\frac{2}{3}P_{n-1}(n\geqslant 2)$；

(2) 若上一步在下底面，则第 $(n-1)$ 步不在上底面的概率为 $1-P_{n-1}(n\geqslant 2)$，若想爬上来，则概率为 $\frac{1}{3}(1-P_{n-1})(n\geqslant 2)$.

因为两个事件是互斥的，所以 $P_n=\frac{2}{3}P_{n-1}+\frac{1}{3}(1-P_{n-1})$，

即 $P_n=\frac{1}{3}P_{n-1}+\frac{1}{3}$，

所以 $P_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\left(P_{n-1}-\frac{1}{2}\right)$，所以数列 $\left\{P_n-\frac{1}{2}\right\}$ 是以 $\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列，

又因为 $P_1=\frac{2}{3}$，所以 $P_n=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{2}$，$P_2=\frac{5}{9}<\frac{2}{3}=P_1$.

故选项 A，C 正确，选项 B 错误.

对于 D 选项，用数学归纳法证明如下：

① 当 $n=1$ 时，左式 $=\frac{1}{4\times\frac{2}{3}-1}=\frac{3}{5}$，右式 $=\frac{1}{2}$，因为 $\frac{3}{5}>\frac{1}{2}$，所以不等式成立；

当 $n=2$ 时，左式 $=\frac{1}{4\times\frac{2}{3}-1}+\frac{1}{4\times\frac{5}{9}-1}=\frac{78}{55}$，右式 $=\frac{4}{3}$，因为 $\frac{78}{55}>\frac{4}{3}$，所以不等式成立；

② 假设 $n=k(k\geqslant 2)$ 时，不等式成立，即 $\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{1}{4P_i-1}>\frac{k^2}{k+1}$，则 $n=k+1$ 时，左式 $=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{1}{4P_i-1}+\frac{1}{4P_{k+1}-1}>\frac{k^2}{k+1}+\frac{1}{4\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3^{k+1}}\right)-1}=\frac{k^2}{k+1}+\frac{3^{k+1}}{3^{k+1}+2}$. 要证 $\frac{k^2}{k+1}+\frac{3^{k+1}}{3^{k+1}+2}\geqslant\frac{(k+1)^2}{k+2}$，只需证 $\frac{3^{k+1}}{3^{k+1}+2}\geqslant\frac{(k+1)^2}{k+2}-\frac{k^2}{k+1}$，即证 $\frac{3^{k+1}}{3^{k+1}+2}\geqslant\frac{k^2+3k+1}{k^2+3k+2}$，即证 $\frac{2}{3^{k+1}}\leqslant\frac{1}{k^2+3k+1}$，即证 $3^{k+1}\geqslant 2k^2+6k+2$，因为 $k\geqslant 2$，所以 $3^{k+1}=3(1+2)^k\geqslant 3(1+2k+4C_k^2)=6k^2+3=2k^2+6k+2+2k(2k-3)+1>2k^2+6k+2$，所以 $\frac{k^2}{k+1}+\frac{3^{k+1}}{3^{k+1}+2}\geqslant\frac{(k+1)^2}{k+2}$，即 $n=k+1$ 时，不等式也成立.

根据①和②可知，对任何 $n\in\mathbf{N}^*$，不等式 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{4P_i-1}>\frac{n^2}{n+1}$ 均成立. 故选项 D 正确.

故选 ACD.

【评注】例 2 以立体几何作为背景，与例 1 相比四个选项的考查形式较为单一. 求解 P_n 仍然是本题最核心的问题，关键是要理解爬行的规则，弄清楚 P_n 与 P_{n-1} 之间的关联，分析方法和求解策略同例 1. 对于选项 D，$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{4P_i-1}=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{2\times\frac{1}{3^i}+1}$ 与 $\frac{n^2}{n+1}$ 的大小比较难度较大，可以采取先猜后证的方式处理，再利用数学归纳法证明.

3. 总结

通过以上两个例题的分析，探索 P_n 与它前几项的递推关系是求解这类问题的关键. 首先，理解题意，弄清楚相邻事件间发生的关联，利用分类讨论思想和思维导图探寻两项或三项的递推关系；其次，利用条件概率和互斥事件等概念，正确建立递推关系；最后，利用数列的相关知识对递推关系进行求解.

(作者单位：江苏省南京市金陵中学)