例谈高中数学数列极限的几种求解技巧

钱柏明

(浙江省龙游县第二高级中学, 浙江 衢州 324400)

摘要: 数列极限是一个重要的概念. 极限是绕过用一个数除以 0 的麻烦而引入了一个过程任意小量, 从而提高解题正确率. 本文分别介绍三种常见的解题思路, 结合具体例题讨论如何解决数列极限的问题, 以便于同学们学习和熟悉掌握这类问题, 也有助于同学们更透彻地理解数列极限问题.

关键词: 高中数学; 数列极限; 解题技巧

中图分类号: G632

文献标识码: A

文章编号: 1008 - 0333(2023) 27 - 0026 - 03

数列极限是高考中常考的一类问题, 考查的形式多种多样, 并且十分灵活. 数列极限的求解的基本方法有: 利用无穷小数列求数列极限、利用定积分定义求数列极限、单调有界定理求数列极限等, 下面, 文章将对此作出详细分析.

1 利用无穷小数列求数列极限

在一些复杂求极限问题中, 直接利用定义来求十分困难, 而且求计算量也会非常大, 还不一定能求出结果. 利用无穷小数列求极限是利用无穷小数列进行“变量”替换再求数列极限的灵活应用. 若数列 $\{a_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则称数列 $\{a_n\}$ 为无穷小数列. 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 0 的充要条件是数列 $\{x_n - a\}$ 为无穷小数列. 根据上述, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 x_n 可作“变量”替换: 令 $x_n = a + a_n$, 其中 $\{a_n\}$ 是一无穷小数列, 又根据上述无穷小数列的定义可知^[1]:

收稿日期: 2023 - 06 - 25

作者简介: 钱柏明(1977.5 -), 男, 浙江省衢州人, 本科, 中学一级教师, 从事高中数学教学研究.

基金项目: 本文系浙江省龙游县 2021 年度小课题“基于小组合作的高中数学高效课堂构建分析”的研究成果(编号: X21004)

(1) 若数列 $\{a_n\}$ 为无穷小数列, 则数列 $\{|a_n|\}$ 也为无穷小数列, 反之亦成立.

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 为无穷小数列, 则数列 $\{(a_1 + a_2 + \dots + a_n) / n\}$ 也为无穷小数列. 解答这类问题, 解题思路一般为:

①根据题中已知条件, 进行“变量”替换;

②根据定理运算出其极限值即可求出所求数列极限.

例 1 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$

剖析 首先根据题中已知条件由 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 作“变量”替换, 再令 $x_n = a + a_n$, 最后根据无穷小数列以及定理(2) 运算出其极限值即可求出所求数列极

限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$

解析 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 作“变量”替换,

令 $x_n = a + a_n$, 其中 $\{a_n\}$ 为无穷小数列, 再根据

定理(2)可知:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a + a_1) + (a + a_2) + \cdots + (a + a_n)}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na + (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)}{n} \\ &= a + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)}{n} \\ &= a + 0 \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} &= a \end{aligned}$$

例2 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_{n-1}) = a$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}$

剖析 首先根据题中已知条件由 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_{n-1}) = a$ 作“变量”替换,再令: $x_n - x_{n-1} = a + \alpha_{n-1}$, 最后根据无穷小数列以及定理(2)运算出其极限值

即可求出所求数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}$

解析 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_{n-1}) = a$ 作“变量”替换,令: $x_n - x_{n-1} = a + \alpha_{n-1}$ 其中 $\{\alpha_n\}$ 为无穷小数列 则有:

$$x_2 - x_1 = a + \alpha_1, x_3 - x_2 = a + \alpha_2, \cdots, x_n - x_{n-1} = a + \alpha_{n-1},$$

$$\text{从而 } x_n = (n-1)a + (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1}) + x_1$$

再根据定理(2)得:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)a + (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1}) + x_1}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)a}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1}}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1}{n} \\ &= a + 0 + 0 = a \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} &= a \end{aligned}$$

2 利用定积分定义求数列极限

利用定积分定义求数列极限是若有数列是某个可积函数特殊的一列积分和,那么计算此数列的极限可以转化为计算定积分,通过计算出定积分即可求出数列极限,这样可以避免繁琐凑配

技巧,简化解答步骤.解答这类问题,解题思路一般为:

- (1) 将数列化成特殊形式的积分和;
- (2) 找被积函数 $f(x)$ 积分的下限以及上限;
- (3) 将 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 写出定积分,计算即可得出所求数列极限.

例3 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n(n+3n)}} \right]$ 的值.

剖析 首先将 a_n 化为特殊形式的积分和,令 $\frac{i}{n} = x$,再找出被积函数 $f(x)$ 积分的下限以及上限最后将 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 写出定积分并计算即可得出所求数列极限.

解析 将 a_n 化为特殊形式的积分和:

$$\begin{aligned} a_n &= \left[\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}} + \frac{1}{\sqrt{n(n+3)}} \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n(n+3n)}} \right] \\ &= \frac{1}{n} \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{(n+1)}{n}}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{(n+2)}{n}}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{(n+3)}{n}}} \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \frac{1}{\sqrt{\frac{(n+3n)}{n}}} \right] \\ &= \frac{1}{n} \left[\frac{1}{1 + \sqrt{\frac{1}{n}}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}}} + \cdots + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{3n}{n}}} \right] \\ &= \sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{i}{n}}} \cdot \frac{1}{n} \\ &= \sum_{i=1}^{3n} f\left(\frac{i}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$$\text{其中 } f\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{i}{n}}}$$

找被积函数 $f(x)$ 积分的下限以及上限,

$$\text{令 } \frac{i}{n} = x \text{ 则被积函数 } f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}},$$

函数 $f(x)$ 积分的下限:

$$\text{积分下限: } a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ (此 } k = 1 \text{)},$$

$$\text{积分上限: } b = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{n} = 3 \text{ (此 } m = 3n \text{)},$$

将 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 写出定积分, 并计算得所求极限:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} &= \left[\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}} + \frac{1}{\sqrt{n(n+3)}} \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n(n+3n)}} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{i}{n}}} \cdot \frac{1}{n} \\ &= \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx \\ &= [2\sqrt{1+x}]_0^3 \\ &= 2 \end{aligned}$$

3 单调有界定理

单调有界数列的基本理论是若数列 $\{a_n\}$ 的所有项全部满足下面不等式 $a_n \leq a_{n+1}$ ($a_n \geq a_{n+1}$), 则称该数列为递增(递减)数列, 递增数列和递减数列称为单调数列^[2]. 在实数系中, 有界的单调数列必有极限. 利用单调有界定理是在求数列极限时, 先证明极限存在, 证明极限存在后, 再求极限, 此时关键在于证明数列的单调性与有界性. 解答这类问题, 解题思路一般为: (1) 先证明数列极限存在; (2) 再证明出数列极限存在后运算即可得出数列极限.

例4 数列 $x_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots \sqrt{a}}}$ (n 个根式, $a > 0, n = 1, 2, \dots$), 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

剖析 先假设 $x_n = \sqrt{a + x_{n-1}}$, 用数学归纳法可得 $x_{n+1} > x_n$, 根据两式可证明 $\{x_n\}$ 单调递增有上界, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ 存在, 对 $x_n = \sqrt{a + x_{n-1}}$ 两边取极限计算即可得出所求数列 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 的值.

解析 由假设可知:

$$x_n = \sqrt{a + x_{n-1}} \quad \text{①}$$

用数学归纳法易证:

$$x_{n+1} > x_n, \quad k \in \mathbf{N} \quad \text{②}$$

即可证数列 $\{x_n\}$ 单调递增,

用数学归纳法可证:

$$x_{n+1} > x_n,$$

事实上:

$$\begin{aligned} 0 < x_{n+1} &< \sqrt{a + x_n} < \sqrt{a + \sqrt{a + 1}} < \sqrt{(\sqrt{a + 1})^2} \\ &= \sqrt{a + 1} \end{aligned}$$

由①②证:

数列 $\{x_n\}$ 单调递增有上界, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ 存在,

对①两边取极限得:

$$l = \sqrt{a + l} \text{ 解得:}$$

$$l = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2} \text{ 和 } l = \frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2} \text{ (舍去)}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$$

求数列极限问题作为高中数学常考的一类问题, 考查数列极限的问题都十分灵活, 文中所述的这三种不同思路求解数列极限问题, 给同学们提供了运用利用无穷小数列求数列极限、利用定积分定义求数列极限、单调有界定理这三种具体的解题思路和应用步骤. 不同思路对应解题方式各不相同, 有助于同学们快速采取正确合理的思路解答这一类问题. 通过对上述例题的分析, 希望同学们在学习过程中应针对不同的问题, 灵活解答, 以此提高解题的效率^[3].

参考文献:

- [1] 张振华. 例析如何巧解“极限题”[J]. 中学生数理化(学研版) 2012(8): 24.
- [2] 章显联. 高考中数列极限的命题特点剖析[J]. 上海中学数学 2006(12): 31-34.
- [3] 卢炼. 高中数学中数列通项与求和若干方法探讨[J]. 语数外学习(数学教育), 2013(07): 59.

[责任编辑: 李璟]