

# “探究与发现”高评价低利用引发的思考<sup>\*</sup>

——以高中数学人教A版新教材为例

● 浙江省宁波市教育局教研室 任伟芳

## 一、课标对数学探究提出了新要求

《普通高中数学课程标准(2017版)》(以下简称《标准》)把数学探究活动纳入必修课程五个主题中,与数学建模活动一起建议安排6课时,在必修课程中要求学生完成一个课题的探究活动,这样数学探究活动已经提高到必修课程中主体地位,还建议安排课时进行正常课堂教学,数学探究活动已成为了建构新教材结构体系一条重要主线,它贯穿于必修、选择性必修和选修课程中,凸显了数学探究活动的重要性,数学探究活动是围绕某个具体的数学问题,开展自主探究、合作研究并最终解决问题的过程,具体表现为:发现和提出有意义的数学问题,猜测合理的数学结论,提出解决问题的思路和方案,通过自主探究、合作研究论证数学结论,新教材设置“探究与发现”栏目就是为实现数学探究活动打开了一个重要的“窗口”。

## 二、“探究与发现”栏目设置及内容解读

人教A版(2019年)教材(以下简称新教材)中设置13个“探究与发现”和2个“数学探究”内容,这些为探究型课堂教学和生成式学习提供了探索素材,教材中安排的数学探究栏目如表1。

“探究与发现”源于波利亚“数学发现”和弗赖登塔尔“再创造”理论,强调学生主动参与探究活动,并能利用已有知识去有所发现。“探究与发现”是课堂教学的补充和深化,教材赋予“探究与发现”栏目包括“正文内容的横向拓展、正文内容的纵向延伸、渗透数学文化”三大基本功能。首先,正文内容的横向拓展功能,即同一知识的不同视角探究,如“利用单位圆的性质研究正弦函数、余弦函数的性质”“用向量法研究三角形的性质”等;其次,正文内容的纵向延伸功能,即知识的纵向迁移,如“1的 $n$ 次方根”“探究 $y = x + \frac{1}{x}$

的图像与性质”等。最后,渗透数学文化功能,即在学习知识的同时让学生感悟数学文化,如“祖暅原理与柱体、锥体的体积”“杨辉三角的性质与应用”等。无论哪种功能,探究活动均以授人以渔为导向,让学生以亲历者的身份,历经模拟当初数学家探索与发现数学知识的过程,通过观察、抽象、类比等数学化的过程,猜测、探求数学结论或规律,从而进行数学的再发现、再创造,其实质是让学生对已有数学知识与学习经验的回顾、构建和重组,形成系统的数学学科整体的知识体系。

## 三、“探索与发现”潜在教学功能

由于“探索与发现”不作考试要求,似乎与学生数学成绩没有直接关联,因此在实际教学中难免会被很多教师所“忽视”,实际上,“探索与发现”不仅局限于教材赋予三大基本功能,而且还有以下三个方面重要的潜在教学功能。

### (一) 助力数学建模发展核心素养

在新一轮的课程改革中,数学建模活动被认为是基于数学思维运用模型解决实际问题的一类综合实践活动,《课标》不仅要求数学建模“走近课堂”,而且还必须“走进课堂”,尽管数学建模发展学生应用数学的意识和能力,但实际支撑建模活动的则是数学探究力,数学探究力的培养需要从“探究与发现”中逐步渗透。

### (二) 培养创新意识和探究能力

探究与发现是人类社会不断进步的重要因素,创新意识是引领科技发展的第一动力,培养学生的创新意识与探究能力是学校教育的终极目标,但如果学生一直以被动接受的方式来获取知识,那么学生的创新意识和探究能力必然会成为无源之水、无本之木,极具

\* 基金项目:本文系2021年浙江省教研立项课题“指向核心素养的高中数学建模课程开发与实践研究”(课题批准号:G2021074)的研究成果之一。

表1 人教A版新教材“探究与发现”栏目

教材	“探究与发现”栏目课题	前一章节内容	探究目标
必修第一册	探究函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 的图像与性质	3.1 幂函数	通过探究函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 的图像与性质掌握研究函数的基本步骤
	互为反函数的两个函数图像间的关系	4.4 对数函数	通过原函数与反函数图像的特点进一步理解反函数
	函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 及函数 $y = A\cos(\omega x + \varphi)$ 的周期	5.4 三角函数图像与性质	从数形两个角度理解三角函数的周期
	利用单位圆的性质研究正弦函数、余弦函数的性质	5.4 三角函数图像与性质	利用单位圆进一步从本质上帮助学生理解三角函数的概念,并利用单位圆研究其性质
必修第二册	用向量法研究三角形的性质	6.4 平面向量的应用	体会向量在几何中的价值和工具性
	1 的 $n$ 次方根	7.3 复数的三角表示	加深对复数几何意义的理解
	祖暅原理与柱体、锥体的体积	8.3 简单几何体的表面积与体积	经历柱、锥、球体积公式的推导过程,渗透数学文化
选择性必修第一册	方向向量与直线的参数方程	2.2 直线的方程	理解直线参数方程的意义
	为什么 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的渐近线	3.2 双曲线	理解渐近线的含义和证明方法
	为什么二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像是抛物线	3.3 抛物线	通过平移变换促使学生进一步理解二次函数的图像就是抛物线
选择性必修第二册	牛顿法——用导数方法求方程的近似解	5.2 导数的运算	感悟导数的应用价值
选择性必修第三册	子集的个数有多少	6.1 分类加法计数原理与分步乘法计数原理	从知识间的联系中多角度理解计数原理,并对集合子集个数进行解惑
	组合数的两个性质	6.2 排列组合	从代数变换和组合的意义两种角度认识组合数
	杨辉三角的性质与应用	6.3 二项式定理	进一步理解二项式系数的性质,并渗透数学文化
	二项分布的性质	7.4 二项分布和超几何分布	加深对二项分布概念的理解

探究价值的“探究和发现”内容为学生提供一个“重新发现”知识的平台。例如“祖暅原理与柱体、锥体的体积”，教师利用实验、模型、多媒体演示等多种方式引导学生主动探究，其探究与推广的内容相当丰富：如何把所有的柱体归为一类，所有的锥体归为一类；如何将三棱柱拆分成三个体积相同的三棱锥；对于没有底和高的球体又该如何寻找一个和它体积相等的几何体等。学生通过亲身经历知识发现、结论证明、新知识应用过程，满满的成就感能够促使学生对数学充满兴趣，从而培养学生创新意识和探究能力。

### (三) 搭建生本舞台转变学习方式

“以学生发展为本，实现人人都能获得良好的教育，不同的人在学习上得到不同的发展”是《课标》的基本理念。转变学生的学习方式，要从传统课堂的知识接受者转变为课堂的主体学习者，搭建数学探究生本“舞台”，倡导学生自主探索，动手实践，合作交流，阅读自学等学习数学的方式。“探究与发现”为学生积极主动，多样的学习方式提供了探究的资料。教师可以根据学生的情况，有选择地使用拓展性材料，可以在课前预习、课堂生成和课后作业中融入探究学习。探究能力培养渗透于问题提出、方案设计到探讨论证、问题

解决等各环节中，其间均要凸显学生的主体地位，充分展示学生个性特长。

## 四、“探究与发现”的教学评价

评价学生一个“探索与发现”主题探究活动的实施效果是无法参照现行考试评价机制的，笔者参考文献研究和教学实践经验认为大致可以从以下三个方面对学生探究活动进行过程性多元化的评价。

### (一) 是否散发“探究”的味道

“探究与发现”的出发点在于“探究”，探究活动不等于学生对教材栏目的阅读，也不等于对其结论的直接习得。“探究味”首先体现于学生的探究意识，即从问题情境中找到探究的方向；其次体现在学生的探究行为，即经历火热的思考、大胆的质疑和各抒己见的交流，以及发现、提出、分析和解决问题的过程；最后体现在学生对知识的理解，即清楚地了解知识的来龙去脉，触及数学本质，达到举一反三。因此，“探究”是探究活动的主基调，有“探究味”学习方式的学生应该给予优秀的好评。

### (二) 是否促进“素养”的渗透

探究活动目的是帮助学生提升 (下转第 83 页)

## 二、“三角函数”单元整体教学设计框架

在高中阶段,针对三角函数这一知识体系的学习,有助于锻炼学生的数学语言,发展其数学思维能力,但是由于这部分内容呈现出典型的碎片化特点,很难形成整体,不利于学生理解和掌握.鉴于此,可以在对三角函数教学进行设计的过程中,遵循单元教学设计展开积极的尝试.

### (一) 研读课标、教材 —— 找准单元整体教学“出发点”

首先要对“课标”以及教材内容进行分析,提炼出高中阶段和三角函数相关的具体教学内容,主要集中在四点:一是任意角与弧度制,这是建立三角函数的重要基础;二是诱导公式,能够就此揭示周而复始的现象;其三,同角三角函数的基本关系,不仅揭示了三角函数的基本性质,也能够体现正弦、余弦以及正切之间的相互关联;其四,函数  $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ ,通过对这一图像的解读与探索,可以将其归类于应用环节.此外,还包括两角和与差公式等等.完成整体梳理和分析之后,为了可以成功建立学习主线,可以对其中的主要内容以及相关知识进行归类:其一为内容类,例如,三角函数的背景、概念等相关知识;其二为运算运用类,就是所辅助的课堂练习以及实践应用,这样就能够初步得出具体的教学内容.

### (二) 进行归类、整合 —— 确定单元整体教学“重难点”

归类、整合是为了准确把握单元教学的重点,而这是对课时合理规划的重要前提,有助于提高教学效能.结合学生的认知水平,可以发现,函数  $y = A \sin(\omega x + \varphi)$  与函数  $y = \sin x$  之间的联系,是学生的理解难点所在,不管是从解析式的视角出发,还是以图像视角来看,都给学生的学习形成了极大的阻碍.但是,不管

是教学,还是应对考试,函数  $y = A \sin(\omega x + \varphi)$  这部分内容非常关键.最终可以将重点聚焦于:认识参数  $A, \omega, \varphi$  对函数  $y = A \sin(\omega x + \varphi)$  图像的影响,就此体会两函数之间的内在联系,掌握函数  $y = A \sin(\omega x + \varphi)$  的图像与性质.

### (三) 注重梳理、整合 —— 设计单元整体教学“主线索”

在确定教学思路之前,首先需要梳理单元内容,准确把握单元教学主线;其次,还要厘清二者之间的内在逻辑.因此针对三角函数的教学,既要呈现自然生成的状态,也要与学生现阶段的认知规律相吻合,还要易于学生自主完成对单元知识体系的成功架构.通过对学生已有的认知经验的梳理,可以发现,在此之前,学生已经完成了函数与幂指对数函数的学习,就此也可表明,他们在学习函数方面,已经具备了相应的学习路线以及学习方法,并初步建立认知.所以,针对本单元的教学,可以建立以下思路:“背景 → 概念 → 图像 → 性质 → 运算 → 应用”.但是,由于三角函数本身具有特殊性,还需要学生充分利用已有经验,在教师的积极引导下,顺利掌握与三角函数相关的知识,如概念、图像、性质等等.此外,还要辅助相应的练习,完成实践应用.在经历上述环节之后,可以说明,三角函数单元知识体系已经初步建立完成,在这一体系的引领下,能够为学生日后的深入学习打下扎实的根基.

综上所述,基于单元视角下,对教学方案进行设计以及架构具备相应的合理性,不仅可以揭示单元教学主线,也能够使学生在其引领下,顺利完成对知识体系的整体性架构,还能够将这一主线贯穿整个学习过程,更利于学生日后的回顾和反思.除上述功能之外,其在渗透、领悟以及灵活运用数学思想方法等诸多方面,都具有极其显著的现实意义,能够促使学生核心素养的全面发展. 

(上接第81页) 数学实践力,促进理性思维、科学精神的形成,其关键是发展数学核心素养.核心素养提升是评价探究活动成功与否的要素.比如:探究过程是否体现归纳、类比、演绎等思想方法;概念理解是否以简驭繁,触及本质,展现数学抽象过程;能否建立数学问题的直观模型;能否进行数学建模,并将数学结论推广应用;能否进行精准的运算和数据分析;能否有逻辑地表达交流等.如果学生能将外在的“数学活动”转化为内在的“理性思维”“数学意识”,那么有促进数学核心素养的探究活动的学生应给予探究成功的评价鼓励.

### (三) 是否展现“创新”的风采

富有创新的探究活动是“探究与发现”的一大亮点,培养学生创新精神和探究能力是探究活动的最高级的目标.充分自主的探究活动能够激发学生的探究与发现问题激情和兴趣,学生“创新”的风采主要集中在:其一,展现思路的创新.一题多解、一题多变、多题归一,发现新问题,提出新思路等.其二,展现发现的创新:发现新的数学定理、公式、结论,并进行证明与推广等.其三,展现技术的创新:信息技术辅助、互联网搜索等.因此,这些展现某一点“创新”风采的学生无疑是“探究与发现”栏目设置收获最大的人. 