

基于 GeoGebra 的高中数学探究式教学

——以“祖暅原理与球的体积”的教学为例

华南师范大学数学科学学院 (510631) 李崇榆

摘要 祖暅原理是我国古代数学的重要成就之一. 采用探究式教学法, 设计了 6 个问题引导学生积极思考, 并在 GeoGebra 的辅助下, 经历“猜想—验证”的过程, 利用祖暅原理构造出几何体求球的体积, 实现自身的“再创造”, 培养学生的创新思维和探究能力, 感受祖暅原理构造几何体求体积的巧妙性, 为类比求解部分复杂几何体的体积积累数学活动经验.

关键词 GeoGebra; 祖暅原理; 球的体积

1 问题提出

祖暅原理也称祖氏原理, 是一个涉及几何体求积且具备微积分思想的著名命题, 由我国南北朝时期杰出数学家和天文学家祖冲之的儿子祖暅为推导球的体积而提出. 在中学教材中, 介绍了应用祖暅原理推导球的体积公式的方法, 该方法不仅是构造性证明的典范, 也是创造性思维的一个很好的载体. 而球体积公式的一些教学实践, 将学生的思维固定在利用祖暅原理构造一个从底面半径和高都为 R 的圆柱中, 挖掉一个底面半径和高都为 R 的倒圆锥得到的几何体求半球的体积的“轨道”上, 学生虽能“看懂”证明, 却不“知其所以然”. 这样的探究有活动无体验, 有经历无感悟, 达不到探究的目的, 学生不能感悟到祖暅原理所蕴含的丰富的数学思想以及创造的乐趣, 只能感受到其“冰冷的美丽”. 鉴于此, 笔者对球的体积部分教学进行了如下的设计.

2 利用祖暅原理推导球的体积教学设计呈现

探究 (一) 利用祖暅原理构造出与半球体积相等的参照几何体 (以下简称参照体)

问题 1 利用祖暅原理构造出的半球的参照体应该满足什么条件?

预设答案: ①高为 R ; ②参照体和半球在等高处被一个平面所截得的截面的面积恒相等.

教师: 很棒! 第一个条件很容易满足, 怎样满足第二个条件呢?

预设答案: 先求出半球在高 h 处的截面面积.

教师: 如图是一个半径为 R 的半球, 该怎么计算它在高 h 处的截面面积呢?

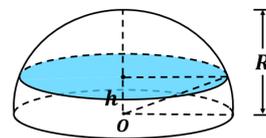


图 1

预设答案: 截面圆的半径为 $\sqrt{R^2 - h^2}$, 故截面圆的面积 $S_{\text{截}} = \pi R^2 - \pi h^2$.

问题 2 怎样的截面的面积为 $\pi R^2 - \pi h^2$?

预设师生活动: 学生前后桌 4 人为一组, 进行分组讨论, 合作交流; 教师巡堂指导学生讨论; 各小组派代表分享谈论结果, 教师引导学生将截面进行分类. 以下为预设的学生讨论的截面:

《中学数学研究》编辑委员会

名誉主编: 柳柏濂

顾问: 王林全, 柳柏濂

社长: 黎稳

主编: 吕杰

副主编: 苏洪雨, 吴有昌

编委: 尤利华, 邓春源, 叶远灵, 吕伟泉, 吕杰, 刘喆, 刘名生, 刘秀湘, 孙道椿, 苏洪雨, 李健全, 吴有昌, 何小亚, 陈小山, 陈奇斌, 林少杰, 林长好, 赵萍, 姚静, 袁平之, 袁汉辉, 耿堤, 徐志庭, 徐勇, 章绍辉, 韩彦昌, 曾辛金, 谢明初

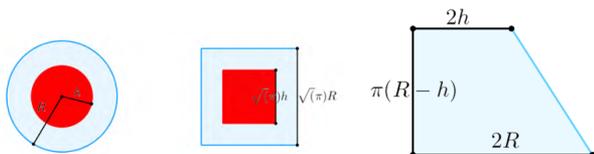


图 2

图 3

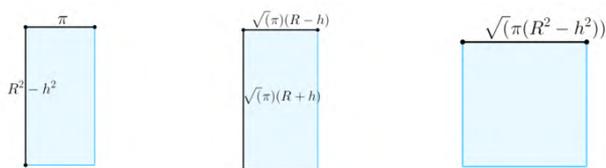


图 4

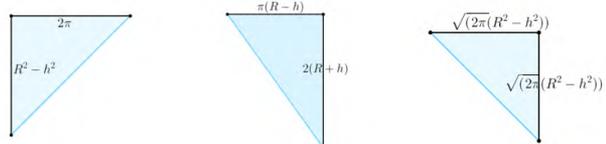


图 5

教师: 随着高 h 的改变, 截面形状也会发生变化. 我们选取同学们所设想的其中一个截面, 先来看看截面随高 h 的变化情况. (由学生指定某一截面进行探究, 本文以长为 $\sqrt{\pi}(R+h)$ 宽为 $\sqrt{\pi}(R-h)$ 的长方形截面为例)

教师: (启动动画 h , 同时可改变观察视角观察截面变化) 截面形状随 h 有什么变化?

预设答案: 截面从正方形变成长方形再变成一条线段.

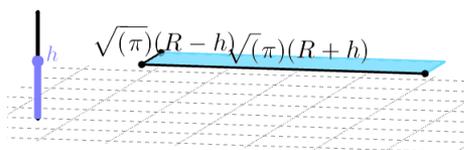


图 6

问题 3 我们知道“点动成线, 线动成面, 面动成体”, 随着高 h 的改变, 这些截面会构造出什么样的参照体呢?

预设教师活动: 教师启动动画 h , 并改变观察视角; 学生前后桌四人为一组进行观察, 合作交流, 教师要引导学生进行合理猜想.

预设答案 1: 从动画看, 截面的四个顶点像是在做直线运动, 形成四条线段运动形成四个平面, 连接底面正方形和高 R 处线段的顶点的话, 我猜会是一个多面体.

预设答案 2: 我也觉得参照体的各个面都是平面. 比如,

一个 h 就对应一个长 $\sqrt{\pi}(R+h)$. 如果分别这两个量看成自变量和因变量, 同时 $h \in [0, R]$, 那么画出的函数图像就是一条线段, 这条线段运动的轨迹就是一个平面.

教师: 很棒, 同学们进行了合理的猜想. 那这个参照体是否和大家的预想一样呢? 我们利用 GeoGebra 跟踪这个截面的轨迹来验证一下我们的猜想.

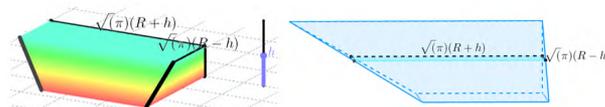


图 7

教师: 这个参照体和我们同学的猜想是一致的! 我们构造出了一个和半球体积相等的多面体!

探究(二) 利用构造出的参照体的体积求球的体积

问题 4 能不能求出该参照体的体积?

预设学生活动: 学生分组讨论, 交流分享.

法 1: 将参照体补形为棱柱, $V_{\text{参}} = V_{\text{棱柱}} - V_{\text{棱锥}} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}R \cdot R \cdot 2\sqrt{\pi}R - \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\pi}R \cdot \sqrt{\pi}R \cdot R = \frac{2}{3}\pi R^3$.

法 2: 将参照体分割成棱柱和棱锥, $V_{\text{参}} = V_{\text{棱柱}} - V_{\text{棱锥}} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}R \cdot R \cdot \sqrt{\pi}R + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi}R \cdot R \cdot R = \frac{2}{3}\pi R^3$.

教师: 通过割补, 我们将这个多面体看成是棱柱和棱锥的简单组合体, 就可以利用学过的棱柱和棱锥的体积公式计算它的体积, 这体现了转化与化归的思想!

问题 5 球的体积是多少?

$$V_{\text{球}} = 2V_{\text{半球}} = 2V_{\text{参照体}} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

预设教师活动: 根据课堂时间, 教师选择继续引导学生猜想并验证或是直接呈现由学生所设想的截面所构造出的参照体.

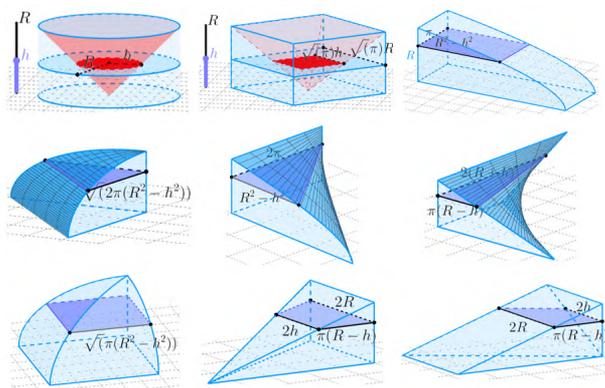


图 8

建立函数模型 解决实际问题

—— 新课改下数学建模课的教学设计

华南师范大学数学科学学院 (510000) 池志阳

华南师范大学附属中学 (510000) 刘宇丹

摘要 数学建模课的设计应侧重科普效果、侧重内容广度、侧重思维活动、侧重信息技术, 在提高学生数学建模素养的同时, 肩负起培养学生数学价值观的重要任务。

关键词 数学建模; 科普效果; 内容广度; 思维活动; 信息技术; 数学价值观

新课标背景下, 数学建模素养越发受到中小学教学所重视, 不同版本的数学高中新教材均在课程中加入了数学建模

课, 然而许多一线数学教师从未有上数学建模课的经验, 因此, 探索新教材中的数学建模课的授课方式和内容就成了当务之急。

在 2020 年 11 月 28 日的广东广雅中学、湖南长郡中学、华南师范大学联合教学研讨活动中, 笔者参与了高中数学建模课的同课异构, 和广雅中学以及长郡中学的两位任课老师共同探索了新课改下数学建模课的授课内容, 课后不少数学

探究(三) 课后拓展题

由椭圆 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b >$

0) 所围成的平面图形绕 y 轴旋转一周, 得如图 9 所示的几何体, 称为椭球体. 请类比应用祖暅原理求球体积公式的做法, 求出椭球体体积, 其积等于 $\frac{4}{3}\pi ab^2$. (解题过程略)

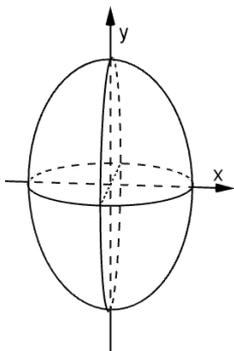


图 9

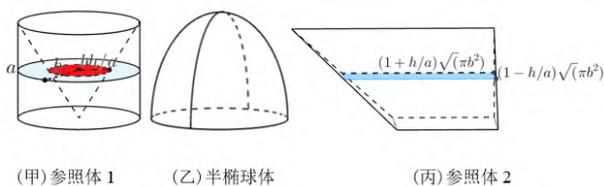


图 10

3 教学思考

(1) 开展有效的数学探究, 提升学生的核心素养

《普通高中数学课程标准(2017年版)》(以下简称课标)指出:“数学建模活动与数学探究活动是综合提升数学学科核心素养的载体。”^[2] 本文不局限于构造一个从底面半径和高都为 R 的圆柱中挖掉一个底面半径和高都为 R 的倒圆锥得到的几何体求半球的体积的思路, 而是基于学生现有的知识, 设计开放性问题“怎样的截面的面积会为 $\pi R^2 - \pi h^2$ ”展

开探究活动, 在教师的引导独立思考, 合作探究, 经历“猜想—验证”的过程, 实现自身的“再创造”, 培养创新能力和探究能力, 感受祖暅原理构造几何体的巧妙性, 积累求其他复杂几何体体积的数学活动经验, 提升学生逻辑推理和直观想象的核心素养。

(2) 突出 GeoGebra 和数学课程融合

课标指出:“运用直观感知、操作确认、推理论证、度量计算等认识和探索空间图形的性质建立空间观念。”^[2] 虽然学生具备一定的逻辑推理和空间想象能力, 但是由于学生没有系统地学习空间点、直线、平面的位置关系, 难以构造参照体和求参照体的体积, 很有可能产生畏难情绪, 使得探究流于形式. 因此, 本文一方面利用 GeoGebra 展现截面随高度 h 的改变而改变的生动的动画, 启发学生进行猜想, 降低抽象程度; 另一方面, 供学生观察操作确认参照体的性质以求体积, 支持学生在“最近发展区”进行合作探索. 尽管 GeoGebra 的功能非常强大, 但在学生的空间观念得以发展后, 应减少 GeoGebra 的使用, 避免学生对信息技术产生依赖, 阻碍空间想象能力的进一步发展。

参考文献

- [1] 储炳南. 传承数学经典 培养核心素养——祖暅原理的再应用[J]. 中学数学月刊, 2019(09): 30-32.
- [2] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2020.
- [3] 尹明学. 利用祖暅原理时构造半球参照体的若干方法[J]. 数学通讯, 1999(04): 20-21.