圆锥曲线内接四边形的四极点调和分割定理

◎徐文平 （江苏东南大学 210096)

【摘要】在圆锥曲线内接四边形的极点与极线问题研究过程中，发现了圆锥曲线内接四边形的四极点调和分割定理，即圆锥曲线内接四边形的对边延伸线交点调和分割对角线极点.

【关键词】圆锥曲线; 内接四边形; 二次曲线切线; 极点与极线; 调和分割

作者在研究圆锥曲线切线的性质过程中，发现了圆锥曲线的内接四边形的一个奇妙性质，即圆锥曲线内接四边形的对边延伸线交点调和分割对角线极点. 运用极点与极线的知识，进行了新定理的简单证明，供大家鉴析.

新定理1 圆锥曲线内接四边形的对边延伸线两交点调和分割对角线两极点.

椭圆、双曲线或者抛物线的内接四边形 $KLMN$，对边线 KN 与 LM 交于 A，对边线 KL 与 NM 交于 B，对角线 KM 的极点为 C，对角线 LN 的极点为 D，KM 与 LN 交于 Q 点，则 A，B，C，D 四点共线，且 AB 调和分割 CD，即 $\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=\frac{2}{AB}$.

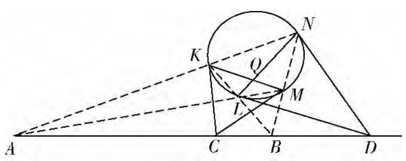

图 1

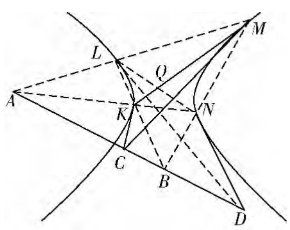

图 2

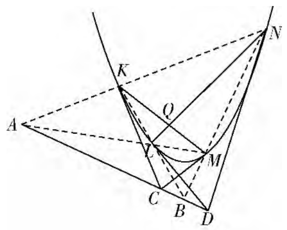

图 3

射影几何的极点与极线知识是研究圆锥曲线切线问题的强有力工具，下面以引理形式给出一些相关的射影几何定理，以便用于证明新定理成立.

引理1 二次圆锥曲线 Γ 的内接完全四点形的对边三点形是圆锥曲线的自配极三点形.

引理2 圆锥曲线中的极线共点于 P，则这些极线相应的极点共线于 P 相应的极线. 反之亦然，称为极点与相应极线对偶性.

引理3（麦克马林定理） 假设 K，L，M，N 四点是圆的外切四边形 $FGEH$ 的4个切点，圆的内接四边形 $KLMN$ 的对边 KN，LM 延伸相交于 A 点，对边 KL，NM 延伸相交于 B 点，圆的内接四边形 $KLMN$ 的对角线 KM，LN 相交于 Q 点，则 F，Q，E，B 四点共线.

简证 依据牛顿定理，圆的外切四边形的对角线的交点和以切点为顶点的四边形对角线交点重合，在图4中，圆外切四边形 $EHFG$ 的对角线 EF，GH 交于 Q 点和以 K，L，M，N 四个切点为顶点的圆内接四边形 $KLMN$ 的对角线 KM，LN 交点 Q 重合.

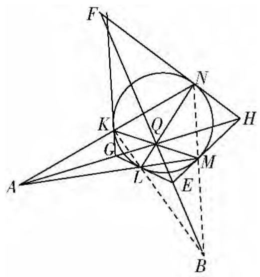

图 4

依据引理1可知，$\triangle AQB$ 为自配极三角形，极点 B 与 AQ 极线对应，极点 Q 与 AB 极线对应. 在图4中，极点 F 点的极线是 KN，极点 E 点的极线是 LM. 因为 F，E，Q，B 四极点相对应的 KN，LM 与 AQ，AB 四条极线交汇共点于 A 点. 依据引理2可知，F，E，Q，B 四点共线于 A 点的极线上，引理3成立. 同理可知，A，G，Q，H 四点也共线.

证明1（椭圆情况） 在图5中，K，L，M，N 四点为椭圆外切四边形 $EHFG$ 的四个切点. 椭圆内接四边形 $KLMN$ 的对角线 KM，LN 交于 Q 点，KN，LM 对边延伸线交于 A 点，KL，NM 对边延伸线交于 B 点，C 点为对角线 KM 的极点，D 点为对角线 LN 的极点，则 AB 调和分割 CD.

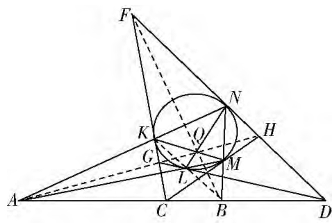

图 5

在图5中，由引理1可知，极点 A 与 QB 极线对应，极点 B 与 AQ 极线对应，极点 Q 与 AB 极线对应，$\triangle AQB$ 为自配极三角形.

由帕斯卡定理可知，A，B，C，D 四点共线，且 AB 为 Q 点的极线.

由牛顿定理可知，椭圆的外切四边形的对角线的交点和以切点为顶点的四边形对角线交点重合，椭圆外切四边形 $EHFG$ 的对角线 EF，GH 交于 Q 点和以 K，L，M，N 四个切点为顶点的椭圆内接四边形 $KLMN$ 的对角线 KM，LN 交点 Q 重合.

由麦克马林定理可知，椭圆外切四边形 $EHFG$ 的对角线 EF 为 A 点关于椭圆的极线. 同时，引理1可知，QB 也为 A 点关于椭圆的极线. 因此，F，Q，E，B 四点共线.

同理可知，A，G，Q，H 四点共线，AH 为 B 点关于椭圆的极线.

从图5推理分析可知，$\triangle FCD$ 中，FB，CH，DG 三线共点交于 E 点.

由赛瓦定理得：$\frac{CB}{BD}\cdot\frac{DH}{HF}\cdot\frac{FG}{GC}=1$.

$\because$ $\triangle FCD$ 被直线 AH 所截，由梅涅劳斯定理得：

$\frac{DH}{HF}\cdot\frac{FG}{GC}\cdot\frac{CA}{AD}=1$.

由上面两个式子得：$\frac{CB}{BD}=\frac{CA}{AD}$.

整理得：$\frac{AC}{CB}=\frac{AD}{DB}$或$\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=\frac{2}{AB}$.

$\therefore A,B,C,D$四点共线，CD调和分割AB，新定理1证明成立.

由射影几何知识可得，以F点为射影点，A,G,Q,H四点共线，AQ调和分割GH.

由射影几何知识可得，以D点为射影点，B,E,Q,E四点共线，BQ调和分割EF.

证明2(双曲线情况)：双曲线内接四边形$KLMN$的对角线KM,LN交于Q点，KN,LM对边延伸线交于A点，KL,NM对边延伸线交于B点，C点为对角线KM的极点，D点为对角线LN的极点，双曲线上K,L,M,N四点切线延伸互相交于E,F,G,H四点. 则AB调和分割CD.

如图6中，由引理1可知，极点A与QB极线对应，极点B与AQ极线对应，极点Q与AB极线对应，$\triangle AQB$为自配极三角形.

由帕斯卡定理，可知A，B，C，D四极点共线，且AB是Q点的极线.

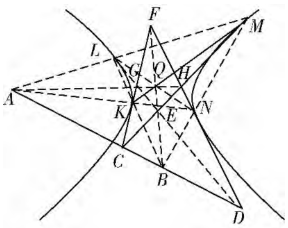

图 6

极点G点的极线是LK，极点H点的极线是MN. 又依据引理1可知，$\triangle AQB$为自配极三角形，极点A与BQ极线对应，极点Q与AB极线对应. A,G,Q,H四极点相对应的QB,LK与AB,MN四条极线交汇共点于B点. 依据引理2可知，A,G,Q,H四点共线，且AQ为B点关于双曲线的极线.

同理可知，B,E,Q,F四点共线，BQ为A点关于双曲线的极线.

易知，LN,KM,EF,GH四线交于Q点，可见牛顿定理3在双曲线情况下也成立.

推理分析可知，$\triangle FCD$中，FB,CH,DG三线共点交于E点，且$\triangle FCD$被直线AH所截交于G点，构成熟知的经典几何图形. 采用类似上述证明1中椭圆切线问题处理方法，易证AB调和分割CD，即$\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=\frac{2}{AB}$.

由射影几何知识可得，以F点为射影点分析A,G,Q,H四点连线，AQ调和分割GH，

由射影几何知识可得，以D点为射影点分析B,E,Q,F四点共线，BQ调和分割EF.

证明3(抛物线情况)：抛物线内接四边形$KLMN$的对角线KM,LN交于Q点，KN,LM对边延伸线交于A点，KL,NM对边延伸线交于B点，C点为对角线KM的极点，D点为对角线LN的极点，抛物线上K,L,M,N四点切线延伸互相交于E,F,G,H四点. 则AB调和分割CD，且AQ调和分割GH，且BQ调和分割EF.

如图7，采用上述证明2中类似双曲线切线问题处理方法，易证A,B,C,D四点共线，A,G,Q,H四点共线，Q,E,B,F四点共线.

推理分析可知，$\triangle FGH$中，FQ,CH,DG三线共点交于E点，且$\triangle FGH$被直线AD所截交于C点，构成熟知的经典几何图形. 采用类似上述证明1中椭圆切线问题处理方法，易证AQ调和分割GH.

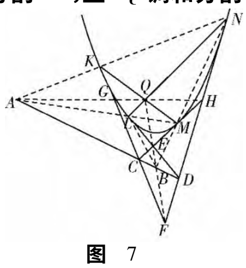

图 7

由射影几何知识可得，以F点为射影点，分析A,B,C,D四点连线，可知AB调和分割CD，即$\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=\frac{2}{AB}$.

由射影几何知识可得，以D点为射影点分析B,E,Q,F四点共线，BQ调和分割EF.

推理1 当有心圆锥曲线内接四边形的其中一条对角线通过有心圆锥曲线圆心时，则另一条对角线的极点必定平分有心圆锥曲线内接四边形的对边延伸线两交点的连线.

推理2 当抛物线内接四边形的其中一条对角线与抛物线对称轴平行时，则另一条对角线的极点必定平分抛物线内接四边形的对边延伸线两交点的连线.

推理1、2证明：如果A,B,C,D是调和点列，当D点在无穷远处时，调和点列只剩下A,B,C三点，则有$2AC=AB$，即$AC=BC$.

新定理的运用(圆锥曲线切线尺规作图)：

圆锥曲线包括椭圆、双曲线和抛物线，圆锥曲线切线问题是几何学研究的重要课题之一，如果采用解析几何方法确定圆锥曲线切线将是比较烦琐. 因此，必须想办法寻找一种简明的纯几何的尺规作图方法确定圆锥曲线切线，以方便实际工程应用.

依据推理1、2，作者提出一种过圆锥曲线上一点作切线的尺规作图新方法.

例1 已知椭圆的斜向割线AB，作一条过椭圆圆心O点的任意割线JK，JA,BK交于E点，作AK,JB交于F点. 确定EF的中点N点，连线NA,NB就是椭圆的切线.

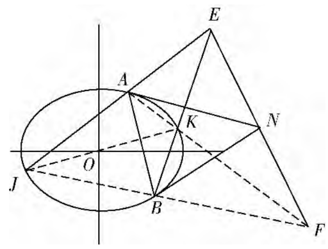

图 8

如果过椭圆心的辅助割线JK是在x轴上，则椭圆切线作法更简单，此时EF为竖向垂线.

双曲线的切线也可采用类似方法作图.

例2 已知抛物线的斜向割线AB，点J是抛物线上任意一点，JA与B点竖垂线交于F点，JB与A点竖垂线交于E点，确定EF的中点N点，连线NA,NB就是抛物线的切线.

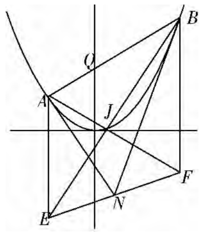

图 9

如果点J是抛物线的顶点，则抛物线切线作法更简单，此时EF为水平线.

【参考文献】

[1] 李建华. 射影几何入门[M]. 北京：科学出版社，2011.

[2] 刘瑞美. 与圆锥曲线切线有关的几个结论及其应用[J]. 中学数学研究，2009(11).

[3] 王兴华. 漫谈圆锥曲线的极点与极线[J]. 中学数学教学，2006(6).

[4] 沈文选. 线段调和分割的性质及应用[J]. 中学教研，2009(9).