

利用同构法妙证圆锥曲线中的“手电筒”模型

余功忠

(湖北省武昌实验中学,湖北 武汉 430061)

2022年新高考I卷第21题考查了双曲线中的“手电筒”模型.但是许多学生苦于算法不好而算不对.如果采用同构法计算,那么两问可一并解决.本文将采用同构方法,证明双曲线、椭圆、抛物线中一般“手电筒”模型的结论.

(2022年全国高考I卷第21题)已知点 $A(2, 1)$ 在双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2 - 1} = 1(a > 1)$ 上,直线 l 交 C 于 P 、 Q 两点,直线 AP 、 AQ 的斜率之和为0.

(1)求 l 的斜率;(2)若 $\tan \angle PAQ = 2\sqrt{2}$,求 $\triangle PAQ$ 的面积.

分析:由于点 P 、 Q 地位相同,可以采用同构的方法解决.具体过程如下:

证明:易得双曲线方程为: $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$.

(1)设直线 $AP: y = k_1(x - 2) + 1$, $P(x_1, y_1)$;直线 $AQ: y = k_2(x - 2) + 1$,由

$$\begin{cases} y = k_1(x - 2) + 1, \\ \frac{x^2}{2} - y^2 = 1, \end{cases}$$

得 $(1 - 2k_1^2)x^2 - 4k_1(1 - 2k_1)x - 2(1 - 2k_1)^2 - 2 = 0$,

所以

$$x_1 = \frac{4k_1(1 - 2k_1)}{1 - 2k_1^2} - 2 = \frac{-4k_1^2 + 4k_1 - 2}{1 - 2k_1^2},$$

$$y_1 = k_1(x_1 - 2) + 1 = \frac{2k_1^2 - 4k_1 + 1}{1 - 2k_1^2}.$$

易知直线 PQ 斜率存在,故设

$$PQ: y = kx + m,$$

因为点 P 在直线 PQ 上,所以

$$\frac{2k_1^2 - 4k_1 + 1}{1 - 2k_1^2} = k \cdot \frac{-4k_1^2 + 4k_1 - 2}{1 - 2k_1^2} + m,$$

整理得

$$(-4k - 2m - 2)k_1^2 + (4k + 4)k_1 + m - 2k - 1 = 0.$$

同理

$$(-4k - 2m - 2)k_2^2 + (4k + 4)k_2 + m - 2k - 1 = 0,$$

所以 k_1 、 k_2 是关于 x 的方程 $(-4k - 2m - 2)x^2 + (4k + 4)x + m - 2k - 1 = 0$ 的两根.

$$\text{由 } k_1 + k_2 = \frac{4k + 4}{4k + 2m + 2} = 0, \text{解得 } k = -1,$$

即 l 的斜率为-1.

(2)不妨设 $k_1 > 0$ 且 $\tan \theta = k_1$,则由已知得

$$\tan \angle PAQ = \tan \left(2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \right) = -\tan 2\theta = 2\sqrt{2},$$

解得 $\tan \theta = \sqrt{2}$ 或 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (舍去),即 $k_1 = \sqrt{2}$,结

合(1)知: $P\left(\frac{10 - 4\sqrt{2}}{3}, \frac{4\sqrt{2} - 5}{3}\right)$,由 $k_2 = -\sqrt{2}$

知 $Q\left(\frac{10 + 4\sqrt{2}}{3}, \frac{-4\sqrt{2} - 5}{3}\right)$.

所以直线 $PQ: y = -x + \frac{5}{3}$ 且 $|PQ| = \frac{16}{3}$,又

因为点 A 到直线距离 $d = \frac{4}{3\sqrt{2}}$,所以 $\triangle PAQ$ 的面

积为 $\frac{16\sqrt{2}}{9}$.

将结论推广至过双曲线上任意一定点 A ,作两条斜率之和(之积)为定值的直线分别交双曲线于 P 、 Q (异于点 A)两点,则直线 PQ 斜率为定值,或直线 PQ 过定点.这就是双曲线中的“手电筒”模型.

1 利用同构法妙证双曲线中的“手电筒”模型

模型 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, 点 $A(x_0, y_0)$ 为双曲线 C 上任意定点, 过点 A 作斜率为 k_1, k_2 的两直线分别交双曲线 C 于 P, Q (异于点 A) 两点. 则

(1) 当 $k_1 + k_2 = 0$ 时, 直线 PQ 的斜率为定值 $-\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$ ($y_0 \neq 0$) (当 $y_0 = 0$ 时, k_{PQ} 不存在);

(2) 当 $k_1 + k_2 = t$ ($t \neq 0$) 时, 直线 PQ 恒过定点 $\left(x_0 - \frac{2y_0}{t}, -y_0 + \frac{2x_0}{t} \cdot \frac{b^2}{a^2}\right)$;

(3) 当 $k_1 \cdot k_2 = -\frac{b^2}{a^2}$ 时, 直线 PQ 的斜率为定值 $-\frac{y_0}{x_0}$;

(4) 当 $k_1 \cdot k_2 = \lambda$ ($\lambda \neq -\frac{b^2}{a^2}$) 时, 直线 PQ 恒过定点 $\left(\frac{\lambda a^2 - b^2}{\lambda a^2 + b^2 x_0}, -\frac{\lambda a^2 - b^2}{\lambda a^2 + b^2 y_0}\right)$.

证明: 设直线 $AP: y = k_1(x - x_0) + y_0$, $P(x_1, y_1)$; 直线 $AQ: y = k_2(x - x_0) + y_0$.

$$\text{由} \begin{cases} y = k_1(x - x_0) + y_0, \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \end{cases} \quad \text{得}$$

$$(-a^2 k_1^2 + b^2)x^2 - 2a^2 k_1(y_0 - k_1 x_0)x + a^2[(y_0 - k_1 x_0)^2 + b^2] = 0,$$

所以

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2a^2 k_1(y_0 - k_1 x_0)}{-a^2 k_1^2 + b^2} - x_0 \\ &= \frac{2a^2 k_1 y_0 - a^2 k_1^2 x_0 - b^2 x_0}{-a^2 k_1^2 + b^2}, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} y_1 &= k_1(x_1 - x_0) + y_0 \\ &= \frac{a^2 k_1^2 y_0 - 2b^2 x_0 k_1 + b^2 y_0}{-a^2 k_1^2 + b^2}. \end{aligned}$$

(I) 当直线 PQ 垂直于 x 轴时, 具体情况具体分析, 省略;

(II) 当直线 PQ 不垂直于 x 轴时, 设 $PQ: y = kx + m$.

因为点 P 在直线 PQ 上, 所以 $y_1 = kx_1 + m$,

即

$$\begin{aligned} &\frac{a^2 k_1^2 y_0 - 2b^2 x_0 k_1 + b^2 y_0}{-a^2 k_1^2 + b^2} \\ &= k \frac{2a^2 k_1 y_0 - a^2 k_1^2 x_0 - b^2 x_0}{-a^2 k_1^2 + b^2} + m, \end{aligned}$$

整理得

$$(ka^2 x_0 + ma^2 + a^2 y_0)k_1^2 - (2a^2 k y_0 + 2b^2 x_0)k_1 - mb^2 + kb^2 x_0 + b^2 y_0 = 0.$$

同理

$$(ka^2 x_0 + ma^2 + a^2 y_0)k_2^2 - (2a^2 k y_0 + 2b^2 x_0)k_2 - mb^2 + kb^2 x_0 + b^2 y_0 = 0,$$

所以 k_1, k_2 是关于 x 的方程 $(ka^2 x_0 + ma^2 + a^2 y_0)x^2 - (2a^2 k y_0 + 2b^2 x_0)x - mb^2 + kb^2 x_0 + b^2 y_0 = 0$ 的两根. 于是,

$$k_1 + k_2 = \frac{2a^2 k y_0 + 2b^2 x_0}{ka^2 x_0 + ma^2 + a^2 y_0} = t,$$

$$k_1 k_2 = \frac{-mb^2 + kb^2 x_0 + b^2 y_0}{ka^2 x_0 + ma^2 + a^2 y_0} = \lambda.$$

$$(1) \text{ 当 } t = 0 \text{ 时, } k = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0};$$

$$(2) \text{ 当 } t \neq 0 \text{ 时, } m = \frac{2ky_0}{t} - kx_0 - y_0 + \frac{2b^2 x_0}{a^2 t}, \text{ 此时直线 } PQ: y = kx + m = k\left(x - x_0 + \frac{2y_0}{t}\right) - y_0 + \frac{2x_0}{t} \cdot \frac{b^2}{a^2}, \text{ 恒过定点 } \left(x_0 - \frac{2y_0}{t}, -y_0 + \frac{2x_0}{t} \cdot \frac{b^2}{a^2}\right);$$

$$(3) \text{ 当 } \lambda = -\frac{b^2}{a^2} \text{ 时, } k = -\frac{y_0}{x_0};$$

$$(4) \text{ 当 } \lambda \neq -\frac{b^2}{a^2} \text{ 时, } m = \frac{b^2 - \lambda a^2}{b^2 + \lambda a^2} x_0 k + \frac{(b^2 - \lambda a^2)y_0}{b^2 + \lambda a^2}, \text{ 所以直线 } PQ: y = kx + m = k\left(x - \frac{\lambda a^2 - b^2}{\lambda a^2 + b^2 x_0}\right) - \frac{\lambda a^2 - b^2}{\lambda a^2 + b^2 y_0}, \text{ 所以直线 } PQ \text{ 恒过定点 } \left(\frac{\lambda a^2 - b^2}{\lambda a^2 + b^2 x_0}, -\frac{\lambda a^2 - b^2}{\lambda a^2 + b^2 y_0}\right).$$

椭圆与双曲线方程极其相似, 因此可以将双曲线中的“手电筒”模型推广到椭圆中, 具体

地,只需将“ b^2 ”替换为“ $-b^2$ ”,即可得到椭圆中的“手电筒”模型.

2 利用同构法妙证椭圆中的“手电筒”模型

模型 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 点 $A(x_0, y_0)$ 为椭圆 C 上任意定点, 过点 A 作斜率为 k_1, k_2 的两直线分别交椭圆 C 于 P, Q (异于点 A) 两点. 则

(1) 当 $k_1 + k_2 = 0$ 时, 直线 PQ 的斜率为定值 $\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$ ($y_0 \neq 0$) (当 $y_0 = 0$ 时, k_{PQ} 不存在);

(2) 当 $k_1 + k_2 = t$ ($t \neq 0$) 时, 直线 PQ 恒过定点 $\left(x_0 - \frac{2y_0}{t}, -y_0 - \frac{2x_0}{t} \cdot \frac{b^2}{a^2}\right)$;

(3) 当 $k_1 \cdot k_2 = \frac{b^2}{a^2}$ 时, 直线 PQ 的斜率为定值 $-\frac{y_0}{x_0}$;

(4) 当 $k_1 \cdot k_2 = \lambda$ ($\lambda \neq \frac{b^2}{a^2}$) 时, 直线 PQ 恒过定点 $\left(\frac{\lambda a^2 + b^2}{\lambda a^2 - b^2} x_0, -\frac{\lambda a^2 + b^2}{\lambda a^2 - b^2} y_0\right)$.

证明: 同双曲线证明, 此处省略.

该结论在 2017 年全国 I 卷理科第 20 题中考查过. 具体题目及解答过程如下:

(2017 年高考全国 I 卷理科第 20 题) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), 四点 $P_1(1, 1)$, $P_2(0, 1)$, $P_3\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $P_4\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 中恰有三点在椭圆 C 上.

(1) 求 C 的方程;

(2) 设直线 l 不经过点 P_2 且与 C 相交于 A, B 两点. 若直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率之和为 -1 , 证明: l 过定点.

解: (1) 易得 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$;

(2) 利用椭圆中的“手电筒”模型的结论知: 直线 l 过定点 $(2, -1)$.

圆锥曲线的性质相近, 因此可以将结论进一步推广至抛物线中. 具体结论稍有变化.

3 利用同构法妙证抛物线中的“手电筒”模型

模型 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$), 点 $A(x_0, y_0)$ 为抛物线 C 上任意定点, 过点 A 作斜率为 k_1, k_2 的两直线分别交抛物线 C 于 P, Q (异于点 A) 两点. 则

(1) 当 $k_1 + k_2 = 0$ 时, 直线 PQ 的斜率为定值 $-\frac{p}{y_0}$ ($y_0 \neq 0$) (当 $y_0 = 0$ 时, k_{AB} 不存在);

(2) 当 $k_1 + k_2 = t$ ($t \neq 0$) 时, 直线 PQ 恒过定点 $\left(x_0 - \frac{2y_0}{t}, -y_0 + \frac{2p}{t}\right)$;

(3) 当 $k_1 \cdot k_2 = \lambda$ 时, 直线 PQ 恒过定点 $\left(x_0 - \frac{2p}{\lambda}, -y_0\right)$.

证明: 设直线 $AP: y = k_1(x - x_0) + y_0$, $P(x_1, y_1)$; 直线 $AQ: y = k_2(x - x_0) + y_0$.

$$\text{由 } \begin{cases} y = k_1(x - x_0) + y_0, \\ y^2 = 2px, \end{cases} \text{ 得}$$

$$k_1^2 x^2 + [2k_1(y_0 - k_1 x_0) - 2p]x + (y_0 - k_1 x_0)^2 = 0,$$

所以

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-2k_1(y_0 - k_1 x_0) + 2p}{k_1^2} - x_0 \\ &= \frac{k_1^2 x_0 - 2k_1 y_0 + 2p}{k_1^2}, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } y_1 = k_1(x_1 - x_0) + y_0 = \frac{-k_1 y_0 + 2p}{k_1}.$$

(I) 当直线 PQ 垂直于 x 轴时, 具体情况具体分析, 省略;

(II) 当直线 PQ 不垂直于 x 轴时, 设 $PQ: y = kx + m$.

因为点 P 在直线 PQ 上, 所以 $y_1 = kx_1 + m$, 即

$$\frac{-k_1 y_0 + 2p}{k_1} = k \frac{k_1^2 x_0 - 2k_1 y_0 + 2p}{k_1^2} + m,$$

整理得

$$(kx_0 + m + y_0)k_1^2 - (2ky_0 + 2p)k_1 + 2pk = 0.$$

同理

$$(kx_0 + m + y_0)k_2^2 - (2ky_0 + 2p)k_2 + 2pk = 0,$$

所以 k_1, k_2 是关于 x 的方程 $(kx_0 + m + y_0)x^2 -$

指向数学学科核心素养的解题探究

邵宏宏

(上海市浦东教育发展研究院, 上海 200127)

1 引言

《普通高中数学课程标准(2017年版)》指出数学学科核心素养是在数学学习和应用的过程中逐步形成和发展的, 主要包括: 数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算、数据分析. 对于中学生, 解题是当前阶段学习数学必不可少的活动, 也是当前高考最主要的检测方式. 中学生在解题活动中获得基础知识、基本技能, 感悟基本数学思想, 积累基本活动经验, 提升思维能力. 教师通过将问题表征与核心素养关联的方式, 在解题教学中发展学生的核心素养.

2 数学学科核心素养与问题表征

数学学科核心素养的六个方面是数学课程目标的集中体现, 是在数学学习和应用的过程中逐步形成和发展的. 问题表征指形成问题空间, 包括明确问题的初始状态、目标状态及允许的操作^[1]. 问题表征形式上可以分成两

种: 一种是外在表征, 即将问题以文字、数式、图表、模型和实验等具体的形式表示出来; 另一种是内在表征, 即问题在人脑中的思考. 两者相互关联, 内在表征是外在表征的基础, 外在表征是内在表征的具体化和外显化^[2]. 在问题解决中, 表征问题是解决问题的前提条件, 解题者若要理解某个数学结构, 就必须在这个数学结构与一个更易理解的数学结构之间建立一个映射, 而表征就是这个映射过程^[3]. 问题表征水平的高低是解题者核心素养水平高低的一种外部呈现. 下文通过一个具体问题的不同探究阶段, 研究解题者的表征状态及相关的数学学科核心素养水平, 帮助教师在解题教学活动中更好地发展学生的学科核心素养.

2.1 问题

若关于 x 的方程 $|x - a_1| + |x - a_2| + \cdots + |x - a_n| = |x - b_1| + |x - b_2| + \cdots + |x - b_n|$ 在实数范围内存在有限个解, 那么方程最多有多

~~~~~  
( $2ky_0 + 2p$ ) $x + 2pk = 0$  的两根.

于是,  $k_1 + k_2 = \frac{2y_0k + 2p}{kx_0 + m + y_0} = t$ ,  $k_1k_2 = \frac{2pk}{kx_0 + m + y_0} = \lambda$ .

(1) 当  $t = 0$  时,  $k = -\frac{p}{y_0}$ ;

(2) 当  $t \neq 0$  时,  $m = \frac{2ky_0 + 2p}{t} - kx_0 - y_0 = \left(\frac{2y_0}{t} - x_0\right)k + \frac{2p}{t} - y_0$ , 此时直线  $PQ: y = kx + m = k\left(x - x_0 + \frac{2y_0}{t}\right) - y_0 + \frac{2p}{t}$ , 恒过定点  $\left(x_0 - \frac{2y_0}{t}, -y_0 + \frac{2p}{t}\right)$ ;

(3) 当  $k_1 \cdot k_2 = \lambda$  时,  $m = \frac{2pk}{\lambda} - kx_0 - y_0$ , 此

时直线  $PQ: y = kx + m = k\left(x - x_0 + \frac{2p}{\lambda}\right) - y_0$ , 所以直线  $PQ$  恒过定点  $\left(x_0 - \frac{2p}{\lambda}, -y_0\right)$ .

另证思路: 鉴于抛物线的特殊性, 此题在涉及具体数据求解时, 可以先通过点差法得到斜率, 再利用斜率关系得到点  $P$ 、 $Q$  坐标的关系, 再联立直线  $PQ$  与抛物线方程, 代入点  $P$ 、 $Q$  坐标的关系, 得到直线方程两个未知量的定量关系, 从而求出直线  $PQ$  所过定点.

### 参考文献

[1] 李文东. 利用同构求解圆锥曲线问题 [J]. 中学教学研究, 2021(7): 26-28.