

关于竞赛数学中排列组合问题的解题策略

广东省深圳市前海港湾学校(518000) 李可欣

摘要 竞赛数学中关于排列与组合的问题,归根到底利用的就是排列、组合与四个基本定理,但是基本解法却多种多样,常见的有列举法、分类讨论、构造不定方程和利用递推关系.本文结合例题对如上解题方法予以归纳和梳理.

关键词 竞赛数学;排列组合;分类讨论;构造不定方程;利用递推关系

从20世纪60年代华罗庚先生倡导数学竞赛至今,已经过去了50多年.近年来,为了发掘和培育人才,数学竞赛活动在全世界蓬勃发展,并逐渐形成了一门特殊的数学学科——竞赛数学.竞赛数学介于中小学与大学教学之间,不断推陈出新,发掘新问题、新方法、新结果,将现代化的内容与趣味性的问题有机结合,把普遍性的问题与独创性的技巧有机结合,在展现数学魅力的同时,利用自己所处的位置,大量地、方便地吸收最前沿的成果,大力开发同学们的数学思维,培养同学们的数学兴趣.而排列组合是高中数学人教版选修2-3的内容,隶属组合数学,是高中数学学习的一个重难点,作为引申,在各类高中数学竞赛中也常见其身影.本文将归纳出解决竞赛数学中的排列组合问题常用的两种解法.

下面我们结合例题对排列组合解题常用的分类讨论、构

造不定方程及利用递推关系三种解题策略进行展开.

1 分类讨论

分类讨论的关键在于如何分类及具体分几类,根据不同的分类方法一道题目可以有許多不同的解法.

例1 在0和10000之间有多少个整数恰好有一位数字是5?

令 S 为0和10000之间恰好有一位数字是5的整数的集合.

解法一 我们对 S 做如下划分: S_1 是 S 中的一位数的集合, S_2 是 S 中的两位数的集合, S_3 是 S 中的三位数的集合, S_4 是 S 中的四位数的集合. S 中没有五位数.显然,我们有 $|S_1|=1$. S_2 的数很自然地分成两种类型:

(1)个位数字是5,(2)十位数字是5.

个位数字是5的数一共有8个(十位数字既不能是0也不能是5),十位数字是5的数一共有9个(个位数字不能是5).故 $|S_2|=8+9=17$.用类似的推理我们得到 $|S_3|=8\cdot 9+8\cdot 9+9\cdot 9=225$.以及 $|S_4|=8\cdot 9\cdot 9+8\cdot 9\cdot 9+8\cdot 9\cdot 9+9\cdot 9\cdot 9=2673$.因此, $|S|=1+17+225+2673=2916$.

解析 只要 $\ln^2(x+1)$ 、 e^{-2x} 与 $\sin x$ 共存,直接作差构造函数证明很难.“和必分”转化为证明三个不等式:(1) $\ln^2(1+x)\leq \frac{x^2}{1+x}$;(2) $e^{-2x}\leq \frac{1}{(1+x)^2}$;(3) $\sin x\leq x$ 同时成立即可.

由 $\ln^2(1+x)\leq \frac{x^2}{1+x}$ 得 $\ln^2(1+x)-\frac{x^2}{1+x}\leq 0$,令 $f(x)=\ln^2(1+x)-\frac{x^2}{1+x}$,则

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2\ln(1+x)}{1+x} - \frac{x^2+2x}{(1+x)^2} \\ &= \frac{2(1+x)\ln(1+x)-x^2-2x}{(1+x)^2}, \end{aligned}$$

令 $g(x)=2(1+x)\ln(1+x)-x^2-2x$,则 $g'(x)=2\ln(1+x)-2x$,令 $h(x)=2\ln(1+x)-2x$,则 $h'(x)=\frac{-2x}{1+x}\leq 0$,所以 $g'(x)=h(x)\leq h(0)=0$.于是 $f'(x)\leq f'(0)=0$,所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为减函数.于是 $f(x)\leq f(0)=0$,所以 $\ln^2(1+x)\leq \frac{x^2}{1+x}$ (当且仅当 $x=0$ 时等号成立)(1)成立.

由 $e^{-2x}\leq \frac{1}{(1+x)^2}$ 及 $1+x>0$ 得 $e^x\geq 1+x$,令 $F(x)=e^x-1-x$,则 $F'(x)=e^x-1\geq 0$.所以 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数,于是 $F(x)\geq F(0)=0$,所以 $e^{-2x}\leq \frac{1}{(1+x)^2}$ (当且仅当 $x=0$ 时等号成立)(2)成立.

由 $\sin x\leq x$ 得 $\sin x-x\leq 0$,令 $k(x)=\sin x-x$,则 $k'(x)=\cos x-1\leq 0$, $k(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为减函数,于是 $k(x)\leq k(0)=0$,所以 $\sin x\leq x$ (当且仅当 $x=0$ 时等号成立)(3)成立.

由(1)+(2)+(3)得 $\ln^2(1+x)+e^{-2x}+\sin x\leq \frac{x^2}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}+x$ 成立.

评注 整体作差构造函数证明较难,利用加法化整体为局部,各个击破是思维的一大亮点,应引起高度重视.

以上数例可以看到局部的解题魅力,逻辑推理的解题应用有广阔的研究空间,笔者在此方面只做了肤浅的探索,还未进行深层次的研究,期待大家的进一步探索.

解法二 通过添加前导零(如6看作0006, 25看作0025, 352看作0352), 可以把 S 中的每一个数都当作4位数. 现在我们根据数字5是位于第一位、第二位、第三位还是第四位而把 S 划分成 S'_1, S'_2, S'_3, S'_4 , 其中 S'_i 表示数字5处于第 i 位的集合($i = 1, 2, 3, 4$). 这四个集合中的每一个都含有 $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ 个整数, 从而 S 所含整数的数目等于 $4 \cdot 729 = 2916$.

例2 (第一届美国数学邀请赛第7题) 某个国王的二十五位骑士围坐在他们的圆桌旁, 他们中间的三位被选派去杀一条恶龙(设三次挑选都是等可能的), 令 P 是被挑到的三位骑士中至少有两位是邻座的概率. 若把 P 写成一个既约分数, 其分子与分母之和是多少?

解法一 显然, 在25位骑士中任选3位的选法总共有 $C_{25}^3 = 2300$ 种, 又根据在三位骑士中至少有两位是邻座的条件, 可分出两种情况.

一、三位骑士依次相邻, 那么有25种选法; 二、两位骑士是邻座, 但第三位骑士不选在已经邻座的两位骑士的两旁, 也就是说, 第三位骑士只能在剩下的21位中任选一位, 这样有 $25 \times 21 = 525$ 种选法. 因此, 满足条件的基本事件数为 $25 + 525 = 550$. 所以 $P = \frac{550}{2300} = \frac{11}{46}$, 分子分母之和为57.

解法二 同解法一, 在25位骑士中任选3位的选法总共有 $C_{25}^3 = 2300$. 由于25位骑士围坐在圆桌旁, 取相邻两位骑士的取法有25种, 那么取第三位的取法就有23种. 也就是说, 被挑到的三位骑士中有两位是邻座的取法有 $25 \cdot 23 = 575$ 种. 然而, 相邻三位骑士的25种取法被取了两次, 所以被挑到的三位骑士中至少有两位是邻座的取法有 $575 - 25 = 550$ 种. 因此 $P = \frac{550}{2300} = \frac{11}{46}$, 分子分母之和为57.

解法三 先从围坐的25人选一人, 则有25种可能性, 并始终约定被选中的人的右边(或左边)那个人也随同而去. 如此, 已选得相邻两人, 再在余下的人中选一个即可. 为避免重复, 在与已选两人不相邻的21人中选一人, 有21种选法, 然后加上已选两人之右邻(或左邻)的一人的一种, 计得 $C_{21}^1 + 1 = 22$ 种选法, 故满足条件的选法有 $25 \cdot 22 = 550$ 种. 于是 $P = \frac{550}{2300} = \frac{11}{46}$, 分子分母之和为57.

例3 (第一届美国数学邀请赛第10题) 数1447, 1005和1231有某些共同点, 即每一个都是以1开头的四位数, 且每个数恰好有两个数字相等. 这样的数共有多少个?

解法一 首先, 不难发现满足条件的四位数有六种类型: 11AB, 1A1B, 1AB1, 1AAB, 1ABB, 1ABA. 而对于每一类 A 都有9种可能, B 都有8种可能, 所以这样的数共有 $6 \cdot 9 \cdot 8 = 432$ 个.

解法二 考虑以1开头的四位数的后三位数, 分两种情况. 若后三位数中含有数字1, 那么1放置的位置有3种可能, 剩下两位数中一位有9种可能性, 另一位只有8种可能, 根据乘法原理, 这样的数有 $3 \cdot 8 \cdot 9 = 216$ 个; 若后三位数中不含1, 则其中相同的两位数字的位置可能有3种, 而该数字有9种可能, 剩下一位数字仅有8种可能, 故共有216种可能. 因此这样的数总共有 $216 + 216 = 432$ 个.

从以上三个例题, 我们不难发现, 一道题目往往可以从许多不同的角度去分类讨论, 而难易度也不尽相同. 因此我们不止要学会如何分类讨论, 还要选取精准的角度, 让分类尽量简洁.

2 构造不定方程

首先我们了解什么是“隔板法”.

隔板法就是在 n 个元素中的 $(n-1)$ 个空中放置 m ($0 \leq m \leq n-1$)个隔板, 从而把 n 个元素分成 $m+1$ 组的方法. 需要注意的是: (1) n 个元素互异; (2) 隔开的每一组中至少有一个元素; (3) 分开的组彼此相异. 结合例4进行进一步理解.

例4 求方程 $x+y+z=10$ 的正整数解的个数.

解析 方程 $x+y+z=10$ 可以看成是用2个隔板插入10个并列的圆球中, 从而把10个圆球分为3组, 又因为条件要求解为正整数, 所以每两个隔板之间必须有至少一个球, 如 $\circ \circ | \circ \circ \circ | \circ \circ \circ \circ$. 那么容易看出, 每一种隔板的放置方法, 对应的就是方程的一组解. 因此方程 $x+y+z=10$ 的正整数解有 $C_9^2 = 36$ 个.

与例4相似, 我们可以利用隔板法得到

引理 不定方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$ ($m \geq 2, n \geq 2, m \leq n$)的正整数解有 C_{n-1}^{m-1} 组.

推论 不定方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$ ($m \geq 2, n \geq 2, m \leq n$)的非负整数解有 C_{n+m-1}^{m-1} 组.

接下来, 跟住以上的引理和推论, 我们可以构造不定方程解决竞赛中的一些排列组合题.

例5 (1990年全国高中数学联赛) 8个女孩和25个男孩围成一圈, 任意两个女孩之间至少站两个男孩. 问: 共有多少种不同的排列方法(只要把圈旋转一下就重合的排法认为是相同的)?

解析 先考虑8个女孩围成一圈, 则有 $\frac{8!}{8} = 7!$ 种不同的排列, 其中8个女孩中的7个空要排入25个男孩, 不妨设每一个空中的男孩数分别为 $x_1, x_2, \cdots, x_8$, 且 $x_1 + x_2 + \cdots + x_8 = 25$. 由于条件要求任意两个女孩之间至少站两个男孩, 故上述不定方程有限制条件 $x_1 \geq 2, x_2 \geq 2, \cdots, x_8 \geq 2$.

将不定方程化为 $(x_1 - 1) + (x_2 - 1) + \cdots + (x_8 - 1) = 17$, 再令 $y_1 = x_1 - 1, y_2 = x_2 - 1, \cdots, y_8 = x_8 - 1$, 即得 $y_1 + y_2 + \cdots + y_8 = 17$, 且 $y_i \geq 1$ (其中 $1 \leq i \leq 8$). 于是上述问题就转化为以上不定方程的正整数解的组数. 由引理知其正整数解个数为 C_{16}^7 .

由因为 25 个男孩有 $25!$ 种排列, 所以符合条件的排列方法有 $7! \times C_{16}^7 \times 25!$ 种.

例 6 (1989 年全国高中数学联赛) 从数 $1, 2, \cdots, 14$ 中按由小到大的顺序取出 a_1, a_2, a_3 , 使得同时满足 $a_2 - a_1 \geq 3$ 与 $a_3 - a_2 \geq 3$. 则所有符合要求的不同取法有多少种?

解析 首先由条件知 $a_1 \geq 1, a_2 - a_1 \geq 3, a_3 - a_2 \geq 3, a_3 \leq 14$, 令 $a_1 = x_1, a_2 - a_1 = x_2, a_3 - a_2 = x_3, 14 - a_3 = x_4$, 则 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 14$. 于是问题转化为求不定方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_8 = 14$ 在条件 $x_1 \geq 1, x_2 \geq 3, x_3 \geq 3, x_4 \geq 0$ 下的整数解的组数.

将方程转化为 $x_1 + (x_2 - 2) + (x_3 - 2) + (x_4 + 1) = 11$. 令 $y_1 = x_1, y_2 = x_2 - 2, y_3 = x_3 - 2, y_4 = x_4 + 1$, 即得 $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 11$, 且 $y_i \geq 1$ (其中 $1 \leq i \leq 4$). 由引理知 $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 11$ 的正整数解的组数是 $C_{10}^3 = 120$ 个, 所以符合要求的不同取法有 120 种.

通过以上的三个例子, 可以发现根据题目的条件列出不定方程是解题的突破口, 而在列出不定方程后, 要不断利用换元法, 使方程转化为满足每一个未知数都 ≥ 1 或都 ≥ 0 的不定方程, 再根据引理或推论得到其正整数解的个数, 从而得出答案. 下面, 我们来解析一道难度较大的排列组合题.

例 7 (2002 年全国高中数学联赛) 在世界杯足球赛前, F 国教练为了考察 $A_1, A_2, \cdots, A_7$ 这七名队员, 准备让他们在三场训练比赛 (每场 90 分钟) 中均上场. 假设在比赛的任何时刻, 这些队员中有且仅有一人在场上, 且 A_1, A_2, A_3, A_4 每人上场的总时间 (以分钟为单位) 均能被 7 整除, A_5, A_6, A_7 每人上场的总时间 (以分钟为单位) 均能被 13 整除. 若每场换人次数不限, 则按每名队员上场的总时间计算, 共有多少种不同的情形?

解析 设第 i 名队员上场的时间为 x_i 分钟 ($1 = 1, 2, \cdots, 7$), 问题即求不定方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_7 = 270$ 在条件 $7 \mid x_i (1 \leq i \leq 4)$ 且 $13 \mid x_j (5 \leq j \leq 7)$ 下的正整数解的组数.

若 $(x_1, x_2, \cdots, x_7)$ 是满足不定方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_7 = 270$ 的一组正整数解, 则应有 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7m$ 及 $x_5 + x_6 + x_7 = 13n$, 其中 m, n 是正整数. 因此, m, n 是不定方程 $7m + 13n = 270$ 在条件 $m \geq 4$ 且 $n \geq 3$ 下

的一组正整数解. 而不定方程 $7m + 13n = 270$ 可以转化为 $7(m - 4) + 13(n - 3) = 203$, 令 $m' = m - 4, n' = n - 3 (m' \geq 0, n' \geq 0)$, 则上述方程化为 $7m' + 13n' = 203$, 也就是说, 问题转化为求不定方程 $7m' + 13n' = 203$ 的非负整数解.

易观察到 $7 \cdot 2 + 13 \cdot (-1) = 1$, 可推出 $7 \cdot 406 + 13 \cdot (-203) = 203$, 即 $m_0 = 406, n_0 = -203$ 是 $7m' + 13n' = 203$ 的整数特解, 从而求得其整数通解为 $m' = 406 - 13k, n' = -203 + 7k$, 其中 k 是整数.

由于 $m' \geq 0, n' \geq 0$, 解得 $129 \leq k \leq 31$. 分别取 $k = 29, 30, 31$ 得到不定方程 $7m' + 13n' = 203$ 满足条件的三组非负整数解 $\begin{cases} m' = 29, \\ n' = 0, \end{cases} \begin{cases} m' = 16, \\ n' = 7, \end{cases} \begin{cases} m' = 3, \\ n' = 14, \end{cases}$ 从而满足不定方程 $7m + 13n = 270$ 在条件 $m \geq 4$ 且 $n \geq 3$ 下的三组正整数解是 $\begin{cases} m = 33, \\ n = 3, \end{cases} \begin{cases} m = 20, \\ n = 10, \end{cases} \begin{cases} m = 7, \\ n = 17. \end{cases}$

① 在 $m = 33, n = 3$ 时, 显然 $x_5 = x_6 = x_7 = 13$ 仅有一种可能; 又设 $x_i = 7y_i (i = 1, 2, 3, 4)$, 则由不定方程 $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 33$ 有 $C_{32}^3 = 4960$ 组正整数解. 即此时不定方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_7 = 270$ 有 3 有 $C_{32}^3 = 4960$ 组正整数解.

② 在 $m = 20, n = 10$ 时, 设 $x_i = 7y_i (i = 1, 2, 3, 4)$, $x_j = 13y_j (j = 5, 6, 7)$, 则由不定方程 $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 20$ 有 C_{19}^3 组正整数解以及 $y_5 + y_6 + y_7 = 10$ 有 C_9^2 组正整数解. 此时不定方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_7 = 270$ 有 $C_{19}^3 \cdot C_9^2 = 34884$ 组正整数解.

③ 在 $m = 7, n = 17$ 时, 仍设 $x_i = 7y_i (i = 1, 2, 3, 4), x_j = 13y_j (j = 5, 6, 7)$, 则由不定方程 $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 7$ 有 C_6^3 组正整数解以及 $y_5 + y_6 + y_7 = 17$ 有 C_{16}^2 组正整数解. 此时不定方程有 $C_6^3 \cdot C_{16}^2 = 2400$ 组正整数解.

综上, 满足条件的正整数解的组数有 $4960 + 34884 + 2400 = 42244$ 个, 即满足题意的不同情形有 42244 种.

3 利用递推关系

利用递推关系, 就是要找到问题一般的关系式, 即递推关系式来解决具体问题, 而寻找递推关系式, 往往可以从简单的问题入手.

首先我们介绍一个经典的递推数列, 即斐波那契数列, 以下为其提出的问题.

在一年的伊始, 把新近出生的雌雄一对兔子放进一个笼子里. 从第二个月开始, 每个月这个雌兔子生出雌雄一对兔子. 而每对新出生的雌雄兔子也从第二个月开始每个月生出一对雌雄兔子. 确定一年后笼子里有多少兔子?

不妨设 f_n 为第 n 个月笼子里兔子的对数. 不难发现, $f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = 2, f_4 = 3, f_5 = 5, f_6 = 8, f_7 = 13, f_8 = 21, f_9 = 34, f_{10} = 55, f_{11} = 89, f_{12} = 144, f_{13} = 233$, 因此一年之后笼子里有 233 只兔子, 并且可以看出 f_n 的递推关系式 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} (n \geq 2)$, 加入初始条件 $f_0 = 0, f_1 = 1$, 则满足这个递推关系式及初始条件的数列叫做斐波那契数列.

利用递推关系解排列组合问题, 常与斐波那契数列有关.

例 8 10 个信封只放 A/B , 则有 $2^{10} = 1024$ 种可能, 除去连续 AAA 或 BBB 的可能, 还有几种可能?

解法一 除去连续 AAA 或 BBB 的可能, 即任意三个信封中至多只有两个相同的 A 或 B 相邻, 则只有六种可能 $AAB, ABA, ABB, BAB, BBA, BAA$, 用树状图列出前三个信封为 AAB 与 ABB 的可能性.

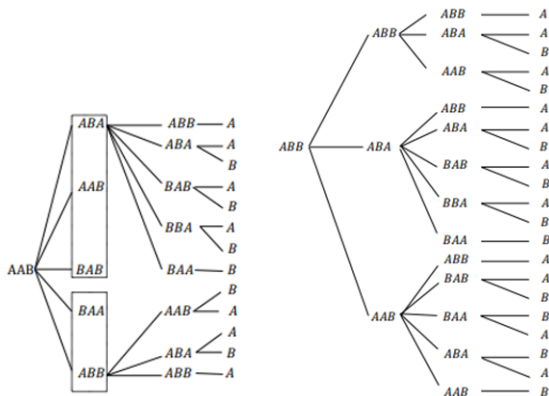


图 1

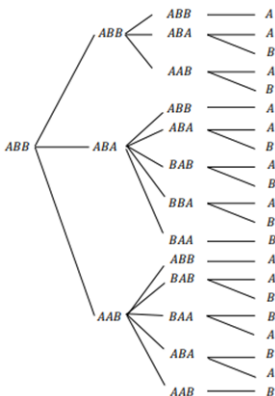


图 2

首先, 从图 1 容易看出, $AABABA, AABAAB, AABBAB$ 满足条件的可能性相同, 都有 8 种, 而 $AABBAA, AABABB$ 都有 5 种可能性, 也就是说, 若前三个信封放置的是 AAB , 那么除去连续 AAA 或 BBB 的可能, 有 $3 \cdot 8 + 5 \cdot 2 = 34$ 种可能性. 而从图 2 可以看出, 前三个信封为 ABB 时, 有 $5 + 8 + 8 = 21$ 种可能性. 继续利用列举法, 不难发现前三封信封为 AAB, ABA, BBA, BAB 的可能性相同, 即 $34 \cdot 4 = 136$ 种; 前三封信封为 ABB, BAA 的可能性相同, 即 $21 \cdot 2 = 42$ 种. 因此除去连续 AAA 或 BBB 的可能, 还有 $136 + 42 = 178$ 种可能.

解法二 设 f_n 为 n 个信封中只放 A/B 且除去连续 AAA 或 BBB 的可能性. 可以列出如下树状图 (图 3). 可以看出 $f_1 = 1, f_2 = 2, f_3 = 3, f_4 = 5, f_5 = 8 \dots$, 并且满足递推关系式 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} (n \geq 2)$, 构成了一个斐波那契数列. 继续算下去, $f_6 = 13, f_7 = 21, f_8 = 34, f_9 = 55, f_{10} =$

$f_9 + f_8 = 34 + 55 = 89$, 也就是说以 A 开头的 10 个信封只放 A/B 且除去连续 AAA 或 BBB 的可能性有 89 种. 同理以 B 开头的可能性也有 89 种, 因此一共有 $89 + 89 = 178$ 种可能.

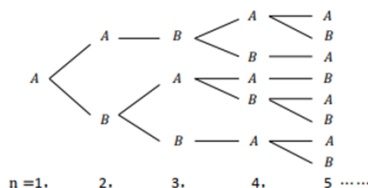


图 3

以上两种不同解法, 显然利用递推关系的解法二要更为简便.

例 9 (1991 年江苏省数学夏令营) 在排成一列的 n 个方格, 用红、黄、蓝三色染每个方格, 每格染一种颜色, 要求任何相邻的格都不同色, 且首尾两格也不同色. 问: 有多少种染法?

解析 设共有 a_n 种不同染法. 易得 $a_1 = 3, a_2 = 6, a_3 = 6$, 且当 $n \geq 4$ 时, 将 n 个方格依次编号后, 格子 1 显然与格子 $n-1$ 不相邻.

(1) 若格子 $n-1$ 与格子 1 染色不同, 此时, 格子 n 只能与格子 1 和格子 $n-1$ 都不同的颜色, 也就只有一种颜色可以染, 而前 $n-1$ 格都满足条件, 则有 a_{n-1} 种不同染法.

(2) 若格子 $n-1$ 与格子 1 染色相同, 此时由于要求任何相邻格不同色, 格子 $n-2$ 的颜色与格子 $n-1$ 不同, 即与格子 1 颜色不同, 那么前 $n-2$ 格都满足条件, 即有 a_{n-2} 种不同染法. 又因为格子 n 要求与格子 1 不同颜色, 有两种可能, 所以共有 $2a_{n-2}$ 不同染法.

综上, 可得递推关系式 $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$, 并可得 $a_n = 2^n + 2(-1)^n (n \geq 2)$.

本文我们主要讨论了竞赛数学中关于排列组合问题的三种主要解题策略, 分别是分类讨论、构造不定方程及利用递推关系. 数学竞赛本就是富有开创性与启发性的, 与组合数学相结合更是让人感到趣味十足, 充满活力. 对于这个课题, 本文探讨的还仅仅是冰山一角, 但笔者会不断研究下去, 也希望能为读者带来收获.

参考文献

- [1] 佩捷主编. 历届美国数学邀请赛试题集 [M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2013.
- [2] 王俊明主编. 排列组合与概率 [M]. 杭州: 浙江大学出版社, 2014.
- [3] 田秋成等编著. 组合数学 [M]. 北京: 电子工业出版社, 2000.
- [4] 陈传理、张同君著. 竞赛数学教程 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1996.