构造等差、等比数列巧解题

汪　程

(湖北省十堰市郧阳中学)

数列是近年高考数学必考知识点,难度中等.从知识层面看,侧重考查等差、等比数列知识以及数列的性质(主要是单调性、周期性);从解题能力层面看,侧重考查学生的运算求解能力、抽象思维能力以及推理论证能力.本文着重说明:遇到已知数列递推关系式时,可考虑在适当变形的基础上,灵活构造等差、等比数列,巧妙解题.

1　构造等差数列巧解题

一般地,若 $a_{n+1}-a_n=d$(其中 $n\in\mathbf{N}^*$,d 为常数),或者 $a_n-a_{n-1}=d$(其中 $n\geqslant2$,$n\in\mathbf{N}^*$,d 为常数),或者 $2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}$(其中 $n\geqslant2$,$n\in\mathbf{N}^*$),则数列$\{a_n\}$是等差数列.我们可以灵活运用该结论巧妙构造等差数列解题.

例1　已知正项数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,且 $2S_n=a_n+\frac{2}{a_n}$,则满足 $S_n\geqslant4$ 成立的正整数 n 的最小值为(　　).

A. 10　　B. 8　　C. 6　　D. 4

解析　在 $2S_n=a_n+\frac{2}{a_n}$ 中,取 $n=1$,可得 $2S_1=a_1+\frac{2}{a_1}$,又 $S_1=a_1>0$,所以 $a_1=\sqrt{2}$.

因为 $2S_n=a_n+\frac{2}{a_n}$,所以 $2S_{n+1}=a_{n+1}+\frac{2}{a_{n+1}}$,从而结合 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$,可得

$$2S_{n+1}=S_{n+1}-S_n+\frac{2}{S_{n+1}-S_n},$$

化简整理得 $S_{n+1}^2-S_n^2=2$.据此可知数列$\{S_n^2\}$是等差数列,且首项为 $S_1^2=a_1^2=2$、公差为2.于是,可得 $S_n^2=2+2(n-1)=2n$,又 $S_n>0$,所以 $S_n=\sqrt{2n}$.因此,不等式 $S_n\geqslant4$ 成立,即$\sqrt{2n}\geqslant4$ 成立,化简得 $n\geqslant8$,所以满足 $S_n\geqslant4$ 成立的正整数 n 的最小值为8,故选B.

点评　遇到数列中"项"与"和"之间的递推关系式,可借助 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$($n\in\mathbf{N}^*$)或者 $a_n=S_n-S_{n-1}$($n\geqslant2$,$n\in\mathbf{N}^*$),将其转化为"和"与"和"之间的递推关系式,从而构造特殊数列巧妙解题.

变式　已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=-\frac{5}{2}$,$a_{n+1}=-\frac{5a_n+2}{2a_n-9}$,则$\frac{1}{a_4-1}=$________;在数列$\{\frac{1}{a_n}\}$中,最大项为第________项.

解析　因为 $a_{n+1}=-\frac{5a_n+2}{2a_n-9}$,所以

$$\frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{1}{-\frac{5a_n+2}{2a_n-9}-1}=\frac{2a_n-9}{-7a_n+7}=$$

$$\frac{2(a_n-1)-7}{-7(a_n-1)}=-\frac{2}{7}+\frac{1}{a_n-1},$$

则$\frac{1}{a_{n+1}-1}-\frac{1}{a_n-1}=-\frac{2}{7}$.故数列$\{\frac{1}{a_n-1}\}$是等差数列,且首项为$\frac{1}{a_1-1}=\frac{1}{-\frac{5}{2}-1}=-\frac{2}{7}$、公差为$-\frac{2}{7}$.于是,可得

$$\frac{1}{a_n-1}=-\frac{2}{7}+(n-1)\times(-\frac{2}{7})=-\frac{2n}{7},$$

所以$\frac{1}{a_4-1}=-\frac{8}{7}$.

因为$\frac{1}{a_n-1}=-\frac{2n}{7}$,所以 $a_n=1-\frac{7}{2n}$,则

$$\frac{1}{a_n}=\frac{2n}{2n-7}=1+\frac{7}{2n-7}.$$

因此,当 $n\in\{1,2,3\}$时,数列$\{\frac{1}{a_n}\}$单调递减,且满足$\frac{1}{a_n}<1$;当 $n\in\{4,5,6,\cdots\}$时,数列$\{\frac{1}{a_n}\}$单调递减,且满足$\frac{1}{a_n}>1$,故在数列$\{\frac{1}{a_n}\}$中,最大项为第4项.

2　构造等比数列巧解题

一般地,若$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$(其中 $n\in\mathbf{N}^*$,q 为非零常

数)，$\frac{a_n}{a_{n-1}}=q$(其中 $n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*$，$q$ 为非零常数)或 $a_n^2=a_{n-1}a_{n+1}$(其中 $n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*$，且各项不为零)，则数列$\{a_n\}$是等比数列.我们可以灵活运用该结论巧妙构造等比数列解题.

例 2 已知数列$\{a_n\}$的首项 $a_1=1$，且$\frac{a_n}{a_n+2}=a_{n+1}$，记数列$\{\frac{1}{a_n}\}$的前 n 项和为 S_n，则满足 $S_n<60$ 成立的正整数 n 的最大值为(　　).

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

解析 因为$\frac{a_n}{a_n+2}=a_{n+1}$，所以两边取倒数变形可得$\frac{a_n+2}{a_n}=\frac{1}{a_{n+1}}$，所以$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2}{a_n}+1$，所以

$$\frac{1}{a_{n+1}}+1=\frac{2}{a_n}+1+1=2(\frac{1}{a_n}+1),$$

又$\frac{1}{a_n}+1\neq 0$，所以

$$(\frac{1}{a_{n+1}}+1)\div(\frac{1}{a_n}+1)=2,$$

则数列$\{\frac{1}{a_n}+1\}$是等比数列，且首项为$\frac{1}{a_1}+1=2$、公比为 2.于是，可得$\frac{1}{a_n}+1=2\times 2^{n-1}=2^n$，所以$\frac{1}{a_n}=2^n-1$.

因此，数列$\{\frac{1}{a_n}\}$的前 n 项和

$$S_n=(2^1-1)+(2^2-1)+(2^3-1)+\cdots+(2^n-1)=2+2^2+2^3+\cdots+2^n-n=\frac{2-2^n\times 2}{1-2}-n=2^{n+1}-n-2.$$

从而不等式 $S_n<60$ 成立，即 $2^{n+1}-n-62<0$ 成立.当 $n=5$ 时，不等式 $2^{n+1}-n-62<0$ 成立；当 $n\geqslant 6$ 时，不等式 $2^{n+1}-n-62<0$ 不成立.

综上，满足 $S_n<60$ 成立的正整数 n 的最大值为 5，故选 A.

点评 一般地，若数列$\{a_n\}$的递推关系式为$\frac{a_n}{a_n+k}=a_{n+1}$(其中 k 为非零常数)，则需要实施两边“取倒数”变形.若数列$\{a_n\}$的递推关系式为 $a_{n+1}=pa_n+q$(其中 $p\neq 0,1,q\neq 0$)，则两边同时加上“$\frac{q}{p-1}$”，可获得等比数列$\{a_n+\frac{q}{p-1}\}$(当 $a_1+\frac{q}{p-1}\neq 0$ 时)，其公比为 p.本题综合性较强，涉及等比数列的概念、通项公式以及求和公式在解题中的综合运用，较好地考查了学生的运算求解能力和推理论证能力.

变式 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且有

$$S_n\cdot a_n=S_{n-1}\cdot a_{n+1}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*),$$

$$a_1=a_2=1.$$

记数列$\{\frac{n}{(n+1)(n+2)}\cdot S_n\}$的前 n 项和为 T_n，若 $T_n\geqslant\frac{15}{2}$，则正整数 n 的最小值等于________.

解析 当 $n\geqslant 2$ 时，因为 $S_n\cdot a_n=S_{n-1}\cdot a_{n+1}$，所以 $S_n\cdot(S_n-S_{n-1})=S_{n-1}\cdot(S_{n+1}-S_n)$，化简整理得 $S_n^2=S_{n-1}\cdot S_{n+1}$.结合 $a_1=a_2=1$，易知 $S_n\neq 0$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，从而可知数列$\{S_n\}$是等比数列，且首项为 $S_1=a_1=1$、公比为

$$S_2\div S_1=2\div 1=2.$$

于是，可得 $S_n=1\times 2^{n-1}=2^{n-1}$，故

$$\frac{n}{(n+1)(n+2)}\cdot S_n=\frac{n\cdot 2^{n-1}}{(n+1)(n+2)}=\frac{2^n}{n+2}-\frac{2^{n-1}}{n+1}.$$

因此，数列$\{\frac{n}{(n+1)(n+2)}\cdot S_n\}$的前 n 项和为

$$T_n=(\frac{2}{3}-\frac{1}{2})+(\frac{2^2}{4}-\frac{2}{3})+(\frac{2^3}{5}-\frac{2^2}{4})+\cdots+(\frac{2^n}{n+2}-\frac{2^{n-1}}{n+1})=-\frac{1}{2}+\frac{2^n}{n+2}.$$

由 $T_n\geqslant\frac{15}{2}$，可得

$$-\frac{1}{2}+\frac{2^n}{n+2}\geqslant\frac{15}{2},$$

化简得 $2^{n-3}\geqslant n+2$.易知当 $n\leqslant 5$ 时，$2^{n-3}\geqslant n+2$ 不成立；当 $n\geqslant 6$ 时，$2^{n-3}\geqslant n+2$ 成立，故所求正整数 n 的最小值等于 6.

当题设给出数列的递推关系式时，我们必须明确常用的变形方式、方法，只有这样才能灵活构造等差、等比数列，并充分利用等差、等比数列的通项公式、求和公式去分析、解决目标问题.一言以蔽之，构造等差、等比数列解题，对学生抽象思维能力的要求较高，有利于较好地培养学生处理数列问题的能力，进而不断提升数学核心素养.

(完)