



一道数列高考题的思考

——谈奇偶数列的破题策略

● 安徽省肥东县城关中学 王东海

一、原题再现

题目 (2014 年新课标全国 I 卷理科数学第 17 题) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 1, a_n \neq 0$, $a_n a_{n+1} = \lambda S_n - 1$, 其中 λ 为常数.

(1) 证明: $a_{n+2} - a_n = \lambda$.

(2) 是否存在 λ , 使得 $\{a_n\}$ 为等差数列? 并说明理由.

这道高考题的第二问是一道奇偶数列问题, 实质上是对一个数列分成两个新的数列进行考查, 学生往往不太熟悉, 加之在分类讨论时, 容易对新数列与原数列的项数及公差的判定混淆不清, 因此学生认为难度较大, 纷纷选择放弃. 另外此题考查了分类讨论、换元思想、化简求解能力等, 是一道综合题.

二、追本溯源

有的学生认为上题是一道能力拔高题, 与我们教材无关, 但事实上该题也是源于课本的, 我们来看现行高中人教版必修 5 第 69 页 6 题:

已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 5, a_2 = 2, a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} (n \geq 3)$, 对于这个新数列的递推公式作一研究, 能否写出它的通项公式.

此题就是典型的奇偶数列问题, 它有五种解法, 这里重点介绍前两种解法, 其中第一种解法就是上述高考题的来源.

解法 1: 由题意, $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} (n \geq 3)$, 则 $a_n + a_{n-1} = 3a_{n-1} + 3a_{n-2} = 3(a_{n-1} + a_{n-2}) (n \geq 3)$, 又 $a_1 + a_2 = 7$, 所以 $\{a_n + a_{n-1}\}$ 是以 7 为首项、3 为公比的等比数列, 故 $a_n + a_{n-1} = 7 \times 3^{n-2}$, 由此 $a_{n-1} + a_{n-2} = 7 \times 3^{n-3}$, 上减下得, $a_n - a_{n-2} = 14 \times 3^{n-3}$, 当 $n = 2k$ 时, $a_{2k} - a_{2k-2} = 14 \times 3^{2k-3}$, 所以由累加法可知, $a_{2k} = -\frac{13}{4} +$

$$\frac{21 \times 9^{k-1}}{4}, \text{ 从而当 } n \text{ 为偶数时, } a_n = -\frac{13}{4} + \frac{21 \times 9^{\frac{n}{2}-1}}{4}$$

$$= -\frac{13}{4} + \frac{7}{4} \times 3^{n-1}, \text{ 当 } n = 2k-1 \text{ 时, } a_{2k-1} - a_{2k-3} = 14$$

$$\times 3^{2k-4}, \text{ 所以由累加法可知, } a_{2k-1} = \frac{13}{4} + \frac{7 \times 9^{k-1}}{4}, \text{ 从而}$$

$$\text{当 } n \text{ 为奇数时, } a_n = \frac{13}{4} + \frac{7 \times 9^{\frac{n+1}{2}-1}}{4} = \frac{13}{4} + \frac{7}{4} \times 3^{n-1},$$

$$\text{综上, 得 } a_n = \begin{cases} -\frac{13}{4} + \frac{7}{4} \times 3^{n-1}, & n \text{ 为偶数,} \\ \frac{13}{4} + \frac{7}{4} \times 3^{n-1}, & n \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

解法 2: 由题意, $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} (n \geq 3)$, 则 $a_n + a_{n-1} = 3a_{n-1} + 3a_{n-2} = 3(a_{n-1} + a_{n-2}) (n \geq 3)$, 又 $a_1 + a_2 = 7$, 所以 $\{a_n + a_{n-1}\}$ 是以 7 为首项、3 为公比的等比数列, 故 $a_n + a_{n-1} = 7 \times 3^{n-2}$, 用待定系数法知, $a_n - \frac{7}{4}$

$\times 3^{n-1} = -\left(a_{n-1} - \frac{7}{4} \times 3^{n-2}\right)$, 故 $\left\{a_n - \frac{7}{4} \times 3^{n-1}\right\}$ 是以 $\frac{13}{4}$ 为首项、-1 为公比的等比数列.

$$\text{所以 } a_n - \frac{7}{4} \times 3^{n-1} = (-1)^{n-1} \times \frac{13}{4}, \text{ 从而 } a_n = (-1)^{n-1} \frac{13}{4} + \frac{7}{4} \times 3^{n-1}.$$

这道教材习题两种解法是解决这类问题的通性通法, 教材对奇偶数列问题的解法考查的比较全面, 也是我们解决上面高考题的方法. 从中也发现了教材的重要性.

三、解法探究

下面用上面教材习题的解法 1 给出原题 (2) 的解答:

解: (2) 由题设 $a_1 = 1, a_n a_{n+1} = \lambda S_n - 1$, 可得 $a_2 = \lambda - 1, a_3 = \lambda + 1$, 假设 $\{a_n\}$ 为等差数列, 则 $a_1 + a_3 =$



$2a_2$, 解得 $\lambda=4$, 由(1)知 $a_{n+2}-a_n=4$, 故数列奇数项构成的数列是首项为 1, 公差为 4 的等差数列, 即 $a_{2k-1}=4k-3$, 令 $n=2k-1$, 则 $k=\frac{n+1}{2}$, 所以 $a_n=2n-1$, n 为奇数, 数列偶数项构成的数列是首项为 3, 公差为 4 的等差数列, $a_{2k}=4k-1$, 令 $n=2k$, 则 $k=\frac{n}{2}$, 所以 $a_n=2n-1$, n 为偶数, 因此存在 $\lambda=4$, 使得 $\{a_n\}$ 为等差数列.

由此可以看出在高考复习时应回归教材, 多挖掘教材, 不能轻视教材、脱离教材. 我们既要对本课例题习题举一反三, 直至达到熟练的程度, 还要对本课例题习题进行适当拔高训练.

四、链接高考

高考原题 (2005 年高考江西卷文科数学第 22 题) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n - S_{n-2} = 3\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ($n \geq 3$), 且 $S_1=1, S_2=-\frac{3}{2}$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解法 1: 由题意, $S_n - S_{n-2} = 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $n \geq 3$, 可得 $a_n + a_{n-1} = 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $n \geq 3$, 故 $a_n = -a_{n-1} + 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, 从而 $a_n - 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n = -[a_{n-1} - 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}]$, 即 $\{a_n - 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n\}$ 是首项为 4, 公比为 -1 的等比数列, $n \geq 3$, 所以 $a_n - 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 4 \times (-1)^{n-1}$, 即 $a_n = 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 4 \times (-1)^{n-1}$, $n \geq 3$. 由已知 $S_1=1, S_2=-\frac{3}{2}$ 知, $a_1=1, a_2=-\frac{5}{2}$ 符合上式, 故 $a_n = 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 4 \times (-1)^{n-1}$.

解法 2: 由题意, $S_n - S_{n-2} = 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $n \geq 3$, 由累加法知, S_{2k}, S_{2k-1} , 从而 $a_{2k} = S_{2k} - S_{2k-1} = -4 + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1}$, $k \geq 1, a_{2k-1} = 4 - 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-3}$, 故易得 a_n 的通项公式.

点评: 该道高考题是对前面教材习题的简单变形, 其解法与教材习题的解法是一样的, 因此更加凸显出回归教材、研究教材的重要性. 解法一用待定系数法求解比较快捷. 解法二先求出奇数项、偶数项的

和, 然后相减得通项公式, 也比较简单.

五、总结提高

下面给出这类题目的常见题型及破解策略, 希望给读者一点启示.

题型一: 求通项公式型

1. 已知隔项递推公式求通项公式

此类奇偶数列问题, 应先根据条件求出 a_{2k}, a_{2k-1} 的通项公式, 再采用换元法合并为 a_n 即可.

练习 1 (2015 年高考湖南卷) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $a_1=1, a_2=2$, 且 $a_{n+2}=3S_n - S_{n+1} + 3$.

(1) 证明: $a_{n+2}=3a_n$.

(2) 求 a_n .

练习 2 (2019 年浙江宁波模拟考理) 数列 $\{a_n\}$

满足 $a_1=1, a_2=2, a_{n+2} = \left(1 + \cos^2 \frac{n\pi}{2}\right)a_n + \sin^2 \frac{n\pi}{2}$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

2. 已知邻项递推公式求通项公式

若题目给出的是已知邻项递推公式, 且有与奇偶有关的条件或出现形如 $2k-1, 2k, 2k+1$ 的下标, 此时首先应根据条件找到隔项递推公式, 然后求出 a_{2k} 和 a_{2k-1} 其中一个后, 另外一个可直接由邻项递推公式求出.

练习 3 (2018 年山东潍坊七中月考) 数列 $\{a_n\}$

满足 $a_1=1, a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n, & n \text{ 为偶数;} \\ 2a_n + 1, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

练习 4 (2020 年江淮名校高三联考) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_{2k}=a_{2k-1} + (-1)^k, a_{2k+1}=a_{2k} + 3^k$, 其中 $k=1, 2, 3, \dots$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

3. 已知 $a_{n+1} + a_n = d$ 或 $a_{n+1} + a_n = f(n), a_{n+1}a_n = d$ 或 $a_{n+1}a_n = f(n)$ 求通项公式

此种题型的解题思路是由 $a_{n+2} + a_{n+1} = f(n+1)$ 与上式作差可得隔项递推公式如下 $a_{n+2} - a_n = f(n+1) - f(n)$; 对于后一种可由 $a_{n+2}a_{n+1} = f(n+1)$ 与上式作商可得隔项递推公式如下 $\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{f(n+1)}{f(n)}$, 然后易求.

题型二: 求前 n 项和型

对于奇偶数列求和题型, 可采用奇偶项分组求和、相邻两项并项求和等通法去处理. (下转第 46 页)



若不存在,请说明理由.

解析:(1)把直线 $y=kx+1$ 代入双曲线方程 $2x^2-y^2=1$ 后,加以整理,得到一个关于 x 的一元二次方程 $(k^2-2)x^2+2kx+2=0$.

因为直线 l 与双曲线 C 的右支有两个不同的交

$$\text{点,所以} \begin{cases} k^2-2 \neq 0, \\ \Delta = (2k)^2 - 8(k^2-2) > 0, \\ -\frac{2k}{k^2-2} > 0, \\ \frac{2}{k^2-2} > 0 \end{cases} \Rightarrow -2 < k < -\sqrt{2}.$$

(2)(过程略,请读者自行完成) 答案:存在这样的

实数 k ,它的值是 $-\frac{6+\sqrt{6}}{5}$ 满足题设.

点评:在解析几何中,凡是涉及直线与双曲线右支(或左支)相交的问题,一般均可转化为方程有不等两正根(或负根),再依据根的分布理论列出有关含有参数的不等式,最终求得参数的取值范围.

四、就地取材转化,函数思想引领

在某些问题中,往往含有两个参数,在已知其中一个参数的取值范围的前提下求另一个参数的取值范围,面对此类问题,我们应该充分利用题中给出的某个已知变量的范围,或由已知条件求出某个变量的范围,然后揭示两个参变量之间的关系,最后利用函数思想求解.

例4 已知抛物线 $C:y^2=4x$,它的焦点为 F ,直线 l 经过点 F ,且与抛物线 C 相交于 A, B 两点.设 $\overrightarrow{FB}=\lambda \overrightarrow{AF}$,且 $\lambda \in [4, 9]$,则直线 l 在纵轴上截距 m 的变化范围是_____.

解析:由抛物线 $C:y^2=4x$ 知 $F(1, 0)$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 由题设 $\overrightarrow{FB}=\lambda \overrightarrow{AF}$, 得 $(x_2-1, y_2)=\lambda(1-x_1, -y_1)$, 即 $\begin{cases} x_2-1=\lambda(1-x_1), \\ y_2=-\lambda y_1. \end{cases}$ ① ②

由②得 $y_2^2=\lambda^2 y_1^2$, 因为 $y_1^2=4x_1, y_2^2=4x_2$, 所以 $x_2=\lambda^2 x_1$. ③

联立①与③可解得 $x_2=\lambda$, 又因为 $\lambda > 0$, 所以 $B(\lambda, 2\sqrt{\lambda})$, 或 $B(\lambda, -2\sqrt{\lambda})$.

又 $F(1, 0)$, 故可得过点 F 和 B 的直线 l 方程为 $(\lambda-1)y=2\sqrt{\lambda}(x-1)$, 或 $(\lambda-1)y=-2\sqrt{\lambda}(x-1)$.

当 $\lambda \in [4, 9]$ 时, 方程 l 在纵轴上的截距 $m = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda-1}$ 或 $m = -\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda-1}$.

$$\text{而 } \frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda-1} = \frac{2(\sqrt{\lambda}-1)+2}{(\sqrt{\lambda}+1)(\sqrt{\lambda}-1)} = \frac{2}{\sqrt{\lambda}+1} + \frac{2}{\lambda-1},$$

这个函数在 $[4, 9]$ 上是单调递减的.

因为 $\lambda \in [4, 9]$, 所以 $\frac{3}{4} \leq m \leq \frac{4}{3}$ 或 $-\frac{4}{3} \leq m \leq -\frac{3}{4}$.

因此所求实数 m 的变化范围为 $\left[-\frac{4}{3}, -\frac{3}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4}, \frac{4}{3}\right]$.

点评:由本例可以看出,根据一个变量的范围求另一变量的范围,关键是揭示两个变量之间函数关系,再依据已知变量的范围即可求出函数的值域,而这个值域就是所求变量的范围.这种解法体现了函数与方程之间的转化,归根到底体现了函数思想在这类问题中的灵活应用.

以上几种方法是解决这类问题最为常见的方法,当然还有其他情形,例如,利用几何图形的性质建立不等关系,利用参数的几何意义建立不等关系,利用基本不等式建立不等关系,通过建立目标函数转化为函数值域问题等,限于篇幅,这里不再举例.但无论是哪种情形或哪种方法,最终都化归为不等式问题或函数值域问题,这是解答这类问题的基本原则.^[1]

(上接第44页)

练习5 (2019年山西太原模拟考) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1=1, a_{2n}=a_{2n-1}+1, a_{2n+1}=2a_{2n}+1$, 若 $S_m > 2019$, 求 m 的最小值.

总之,通过这样一道高考题的追本溯源,让我们更加重视回归课本,反思课本,不放过课本上每一道例

题与习题,尤其是教材习题的 B 组题,因为这种题更容易适当拔高,出现在高考试卷中.另外奇偶数列问题对学生数学思维的逻辑性、全面性都有较高要求,以上介绍的几种思考方法应因题而异,灵活选用.在考试的关键要短时间找到突破口,善于从不同角度挖掘思路,从而有效地解决此类问题.^[2]