



圆锥曲线中的四类“定点、定值问题”的解法总结与复习指导

吴志勇

(安徽省合肥一六八中学)

在圆锥曲线中,与定点、定值有关的二级结论大量存在,有的结论具有优美的对称性与通用性,便于记忆与应用.大部分结论并不具备便于记忆的特点,但这些结论的运用往往会为解题者提供一个明晰的目标,进而选择恰当的解题方法使待求问题得以顺利解决.这个时候我们该如何对待不容易记忆但又能够为我们解题提供大方向的二级结论呢?笔者认为针对这种情况,我们应该心怀大格局,从整体上对这些与定点、定值有关的二级结论进行分类,从宏观上理解并记住在什么条件下会有定点,在什么条件下会有定值.笔者从斜率之和为定值、斜率之积为定值、由特殊到一般以及极点与极线理论的应用四个方面,通过典型实例阐述在问题求解过程中,如何做到心怀大格局,感受目标引领方法的解题思想带给我们的欣喜.

1 斜率之和为定值

1) 已知点 P 是圆锥曲线 C 上一定点,点 A, B 是 C 上两个动点,若直线 PA, PB 的斜率满足 $k_{PA} + k_{PB} = 0$,则直线 AB 的斜率为定值.

 **例 1** 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 $F, E(-1, 0)$ 为其准线 l 与 x 轴的交点,过点 E 作直线与抛物线 C 在第一象限交于点 A, B ,且 $\overrightarrow{AE} = 4\overrightarrow{BE}$.

(1) 求 $\frac{|FA|}{|FB|}$ 的值;

(2) 设圆 $M: (x-4)^2 + y^2 = r^2 (0 < r \leq 2\sqrt{3})$,过点 A 作圆 M 的两条切线分别交抛物线 C 于点 P, Q ,求 $\triangle APQ$ 面积的最大值.

分析 本题第(1)问根据准线与 x 轴交点坐标为 $E(-1, 0)$,可得 $p=2$,所以抛物线的方程为 $y^2 = 4x$.再由抛物线的定义可得 $\frac{|FA|}{|FB|} = 4$,同时可得 $A(4, 4)$.第(2)问中,因为 $AM \perp x$ 轴,再由对称性可得 $k_{AP} + k_{AQ} = 0$,从而可得直线 PQ 的斜率为定值.下一步我们只需要根据条件求出直线 PQ 的斜率,则直线方程中

只含有一个变量,即 $\triangle APQ$ 面积的表达式中只含有一个变量了,进而得出面积的最大值.

解 (1) $\frac{|FA|}{|FB|} = 4$ (求解过程略).

(2) 设两交点的坐标为 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$,则直线 AP 的方程为 $y - 4 = \frac{y_1 - 4}{x_1 - 4}(x - 4)$,因为 $y_1^2 = 4x_1$,整理得 $4x - (y_1 + 4)y + 4y_1 = 0$.因为 AP 与圆 M 相切,所以 $\frac{|16 + 4y_1|}{\sqrt{16 + (y_1 + 4)^2}} = r$,即

$$(x_1 + 2y_1 + 8)r^2 - 16(x_1 + 2y_1 + 4) = 0.$$

同理,可得 $(x_2 + 2y_2 + 8)r^2 - 16(x_2 + 2y_2 + 4) = 0$,所以直线 PQ 的方程为

$$(x + 2y + 8)r^2 - 16(x + 2y + 4) = 0,$$

即 $x + 2y + \frac{8(r^2 - 8)}{r^2 - 16} = 0$.令 $m = r^2 - 16$,则 $m \in$

$(-16, -4]$,所以 $PQ: x + 2y + 8 + \frac{64}{m} = 0$,再将直线

与抛物线方程联立,利用弦长公式得出 $|PQ| = 8\sqrt{5} \times$

$\sqrt{-1 - \frac{16}{m}}$,点 A 到直线的距离为 $d = \frac{|20 + \frac{64}{m}|}{\sqrt{5}}$,进

而得出含有变量 m 的面积为

$$S_{\triangle APQ} = \frac{1}{2} |PQ| \cdot d = 16 \times \sqrt{-1 - \frac{16}{m}} \times |5 + \frac{16}{m}|,$$

最后利用函数思想求得面积的最大值为 $\frac{256\sqrt{3}}{9}$.



点评 求解时有两处值得关注,一是能够根据 $k_{AP} + k_{AQ} = 0$ 得出直线 PQ 的斜率为定值,进而向着这个目标思考求出直线的斜率,将三角形面积表示为只含有一个变量的函数式.二是求直线 PQ 的方程时要有整体意识,根据过两点有且仅有一条直线,既得出了直线的斜率为定值,又在直线方程中保留了原始的变量 r ,为后续求面积的最值提供了方便.从本题的解题过程中不难得出,当我们有了大格局,就有了明确的解题方向,引领着正确的解题思想,从



而将所求问题顺利解决.

2) 若点 P 是圆锥曲线 C 上一定点, 点 A, B 是 C 上两个动点, 若直线 PA, PB 的斜率满足 $k_{PA} + k_{PB} = \lambda (\lambda \neq 0)$, 则直线 AB 经过定点.

例 2 已知椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 设直线 l 不经过点 $P(0, 1)$, 且与椭圆相交于 A, B 两点, 若直线 PA 与直线 PB 的斜率之和为 -1 , 求点 $P(0, 1)$ 到直线 l 的距离 d 的取值范围.

分析 根据条件 $k_{PA} + k_{PB} = -1$, 可得直线 l 必过定点, 我们只需求出这个定点后, 将直线 l 设成只含有一个参量的方程, 再由直线与椭圆相交, 求出参量的取值范围.

解 设直线 AB 的方程为 $x = my + n$, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 将直线 AB 与椭圆的方程联立可得 $(m^2 + 4)y^2 + 2mny + (n^2 - 4) = 0$, 由根与系数的关系可得 $y_1 + y_2 = -\frac{2mn}{m^2 + 4}, y_1 y_2 = \frac{n^2 - 4}{m^2 + 4}$. 由已知条件 $k_{PA} + k_{PB} = -1$, 可得 $\frac{y_1 - 1}{x_1} + \frac{y_2 - 1}{x_2} = -1$, 整理可得 $(2m + m^2)y_1 y_2 + (n - m + mn)(y_1 + y_2) + n^2 - 2n = 0$, 将 $y_1 + y_2$ 和 $y_1 y_2$ 代入得 $(m + n)(n - m - 2) = 0$. 当 $m + n = 0$ 时, 直线 $AB: x = m(y - 1)$ 过 $P(0, 1)$, 不符合题意. 当 $n - m - 2 = 0$ 时, 直线 $x = m(y + 1) + 2$ 恒过点 $T(2, -1)$, 则直线 AB 简化为 $x - my - (m + 2) = 0, \Delta = -64m > 0$, 所以 $m < 0$, 则 P 点 $(0, 1)$ 到直线 l 的距离为

$$d = \frac{|2m + 2|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{4\left(1 + \frac{2}{m+1}\right)} \in (0, 2).$$



点评 以上两个例题都是曲线上一定点与两动点的连线斜率之和 λ 为定值的情况, 区别在于当 $\lambda = 0$ 时, 动直线的斜率为定值; 当 $\lambda \neq 0$ 时, 动直线恒过定点. 无论直线的斜率是定值, 还是直线恒过定点, 都可以将直线方程转换为只含有一个参量的方程, 从而将问题顺利解决, 故可将两种情况放在一起记忆.

2 斜率之积为定值

若点 P 是圆锥曲线 C 上一定点, 点 A, B 是 C 上两个动点, 若直线 PA, PB 的斜率满足 $k_{PA} k_{PB} = \lambda (\lambda \neq 0)$, 则直线 AB 恒过定点.

例 3 已知离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F , 左、右顶点分别为 A_1, A_2 , 上顶点为 B , 且 $\triangle A_1 B F$ 的外接圆半径为 $\sqrt{3}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设斜率存在的直线 l 交椭圆 C 于 P, Q 两点 (P, Q 位于 x 轴的两侧), 记直线 $A_1 P, A_2 P, A_2 Q, A_1 Q$ 的斜率分别为 k_1, k_2, k_3, k_4 , 若 $k_1 + k_4 = \frac{5}{3}(k_2 + k_3)$, 求 $\triangle A_2 P Q$ 面积的取值范围.

分析 由第(1)问得出椭圆的方程后, 第(2)问是求椭圆上一个定点与两个动点构成的三角形的面积大小问题, 故我们可以从已知条件入手, 探寻出 k_2 与 k_3 的关系后, 再得出直线 PQ 恒过定点, 将直线 PQ 转化为只含有一个参量的方程, 进而将 $\triangle A_2 P Q$ 的面积表示出只含有这个参量的式子, 最后求出取值范围.

解 (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$

(求解过程略).

(2) 如图 1 所示, 由椭圆的第三定义可得

$$k_1 k_2 = -\frac{b^2}{a^2} = -\frac{1}{2}, k_3 \cdot k_4 = -\frac{1}{2},$$

所以 $k_1 = -\frac{1}{2k_2}, k_4 = -\frac{1}{2k_3}$, 代入 $k_1 + k_4 = \frac{5}{3}(k_2 + k_3)$, 可得 $k_2 k_3 = -\frac{3}{10}$. 设直线 PQ 的方程为 $x = ty + m (t \neq 0)$, $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$, 与椭圆方程联立可得

$$(t^2 + 2)y^2 + 2mty + m^2 - 4 = 0,$$

由根与系数的关系可得

$$y_1 + y_2 = -\frac{2mt}{t^2 + 2}, y_1 y_2 = \frac{m^2 - 4}{t^2 + 2},$$

则

$$k_2 k_3 = \frac{y_1}{x_1 - 2} \cdot \frac{y_2}{x_2 - 2} = \frac{y_1 y_2}{(ty_1 + m - 2)(ty_2 + m - 2)} = -\frac{3}{10},$$

化简整理可得 $(m - 2)(2m + 1) = 0$.

当 $m - 2 = 0$, 直线 $PQ: x = ty + 2$, 恒过点 $A_2(0, 2)$, 不符合题意.

当 $2m + 1 = 0$, 直线 $PQ: x = ty - \frac{1}{2}$, 恒过点 $D(-\frac{1}{2}, 0)$, 进而可得

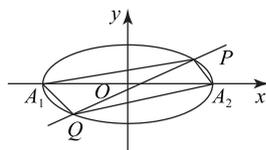


图 1



$$S_{\triangle A_2PQ} = \frac{1}{2} |A_2D| |y_1 - y_2| = \frac{5}{4} \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2} = \frac{5}{4} \cdot \frac{\sqrt{16t^2 + 30}}{t^2 + 2},$$

利用换元法可求得 $S_{\triangle A_2PQ} \in (0, \frac{5\sqrt{30}}{8})$.



点

曲线上一定点与两动点连线的斜率之积为定值,则两动点连线恒过一定点.结论的推导过程:首先设出动直线方程 $y=kx+m$,将之与曲线方程联立,再利用根与系数的关系得出 y_1+y_2 与 y_1y_2 的表达式,代入 $k_1+k_2=\frac{5}{4}(k_2+k_3)$ 中,从而得出直线方程中的两个参数 t, m 的关系式,将直线的方程转换为只含有一个参量的表达式,进而得出直线恒过一定点.在解题中,遇到这种类型的题目,只需要心中明了动直线恒过定点这一目标,至于定点是什么则因题而异,无须记忆.有了目标的引领,根据条件求出直线恒过的定点,进而顺利解决具体问题.在平时的教学中,我们不难得出一个结论:已知点 P 是圆锥曲线 C 上一定点, A, B 是 C 上两个动点(不与点 P 重合),若 $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = \lambda$ (λ 为一定值),则直线 AB 恒过定点.这个结论的推导思路与上一个结论类似,但适用范围更加广泛,因为此结论在斜率不存在的情况下依然适用,可以一起记忆.

3 由特殊到一般



例 4 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$, 直线 l 与 x 轴交于点 E , 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 是否存在点 E , 使得 $\frac{1}{|EA|^2} + \frac{1}{|EB|^2}$ 为定值? 若存在, 请指出点 E 的坐标, 并求出该定值; 若不存在, 请说明理由.

分析 本题的常规解题思路是直接设出点 E 的坐标 $(m, 0)$ 和直线 l 的方程 $x=ky+m$, 将直线方程与椭圆方程联立后, 利用根与系数的关系, 将 $\frac{1}{|EA|^2} + \frac{1}{|EB|^2}$ 用参数 k 和 m 表示出来, 再找出其结构关系, 使其值与参数无关, 从而得出点 E 的坐标和定值. 这种解法思路清晰, 简洁明了, 但 $\frac{1}{|EA|^2} + \frac{1}{|EB|^2}$ 的表达式中含有两个参量, 不易直接得出其恒过的定点与定值. 我们可以先考虑动直线 l 的两种特

殊位置, 确定点 E 的坐标与定值, 然后利用所求的点 E 的具体坐标以及 $\frac{1}{|EA|^2} + \frac{1}{|EB|^2}$ 的值, 再验证当直线不是特殊位置时, 所求的点 E 的坐标和定值也满足题意.

解 假设存在点 $E(m, 0)$, 使得 $\frac{1}{|EA|^2} + \frac{1}{|EB|^2}$ 为定值. 当直线 AB 与 x 轴重合时, 可得 $\frac{1}{|EA|^2} + \frac{1}{|EB|^2} = \frac{12+2m^2}{(6-m^2)^2}$; 当直线 AB 与 x 轴垂直时, 可得 $\frac{1}{|EA|^2} + \frac{1}{|EB|^2} = \frac{6}{6-m^2}$.

若 $\frac{1}{|EA|^2} + \frac{1}{|EB|^2}$ 为定值, 则必有 $\frac{12+2m^2}{(6-m^2)^2} = \frac{6}{6-m^2}$, 解得 $m = \pm\sqrt{3}$, 此时 $E(\pm\sqrt{3}, 0)$, 且 $\frac{1}{|EA|^2} + \frac{1}{|EB|^2} = 2$. 由对称性, 只需证明过点 $E(\sqrt{3}, 0)$ 的任意直线 l , $\frac{1}{|EA|^2} + \frac{1}{|EB|^2} = 2$ 即可. 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 直线 $l: x=ky+\sqrt{3}$, 与椭圆方程联立可得

$$(3+k^2)y^2 + 2\sqrt{3}ky - 3 = 0.$$

由根与系数的关系得

$$y_1 + y_2 = -\frac{2\sqrt{3}k}{3+k^2}, y_1y_2 = -\frac{3}{3+k^2},$$

代入可得

$$\frac{1}{|EA|^2} + \frac{1}{|EB|^2} = \frac{1}{(k^2+1)y_1^2} + \frac{1}{(k^2+1)y_2^2} = \frac{(y_1+y_2)^2 - 2y_1y_2}{(k^2+1)y_1^2y_2^2} = 2.$$

综上, 存在点 $E(\pm\sqrt{3}, 0)$, 使得

$$\frac{1}{|EA|^2} + \frac{1}{|EB|^2} = 2.$$



点

由特殊到一般的解题思想是一种常见的数学思想, 在求解圆锥曲线定点与定值的探索性问题中经常用到. 解题思路: 先通过分析特殊位置确定出所求的定点或定值, 再验证此定点或定值在一般情况下也成立.

4 极点与极线理论

4.1 极点与极线的定义与性质

定义 已知圆锥曲线 $C: ax^2 + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$, 则称点 $P(x_0, y_0)$ 与直线 $l: ax_0x +$



$cy_0y+d(x_0+x)+e(y_0+y)+f=0$ 是圆锥曲线的极点与极线.

性质 1 当点 P 在圆锥曲线 C 上时,其极线 l 是 C 在点 P 处的切线.

性质 2 如图 2 所示,当点 $P(x_P, y_P)$ 不在圆锥曲线 C 上时,过点 P 引两条割线依次交圆锥曲线 C 于 E, F, G, H 四点,这四点两两连线的交点为 M, N ,则直线 MN 为点 P 对应的极线, MN 的方程为

$$ax_Nx+cy_Ny+d(x_N+x)+e(y_N+y)+f=0.$$

同理,可得点 $N(x_N, y_N)$ 的极线方程为

$$PM: ax_Nx+cy_Ny+d(x_N+x)+e(y_N+y)+f=0,$$

点 $M(x_M, y_M)$ 的极线方程为

$$PN: ax_Mx+cy_My+d(x_M+x)+e(y_M+y)+f=0.$$

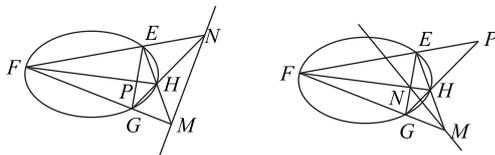


图 2

4.2 极点与极线理论的应用举例

有关以极点与极线理论为背景的考题有很多,但是在解答题中,其解答方式与规范解答方式是相悖的,不能直接使用,但极点与极线理论的运用,可以很快得出所求问题的答案,为我们规范解题提供一个方向.一旦有了明确的目标,我们就能够增强自己解题的信心,从而在解题中做到游刃有余,使问题得以顺利解决.下面我们以一道高考真题的常规解法和在极点与极线理论指引下的解法为例,来感受一下目标引领方法的解题思想带给我们的欣喜.

例 5 (2020 年全国 I 卷理 20) 已知 A, B 分别为椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$ 的左、右顶点, G 为 E 的上顶点, $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GB} = 8$, P 为直线 $x = 6$ 上的动点, PA 与 E 的另一个交点为 C , PB 与 E 的另一交点为 D .

(1) 求 E 的方程;

(2) 证明: 直线 CD 过定点.

解 (1) $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ (求解过程略).

(2) **方法 1** 设 $P(6, y_0)$, 则直线 AP 的方程为

$y = \frac{y_0}{9}(x+3)$, 将之与椭圆方程联立可得

$$(y_0^2+9)x^2+6y_0^2x+9y_0^2-81=0,$$

由 $A(-3, 0)$, 可得 $(-3) \cdot x_C = \frac{9y_0^2-81}{y_0^2+9}$, 所以

$$x_C = \frac{-3y_0^2+27}{y_0^2+9},$$

代入直线方程 $y = \frac{y_0}{9}(x+3)$, 可得 $y_C = \frac{6y_0}{y_0^2+9}$, 所以

$$C\left(\frac{-3y_0^2+27}{y_0^2+9}, \frac{6y_0}{y_0^2+9}\right).$$

同理, 可得 $D\left(\frac{3y_0^2-3}{y_0^2+1}, \frac{-2y_0}{y_0^2+1}\right)$, 所以直线 CD 的

方程为

$$y - \left(\frac{-2y_0}{y_0^2+1}\right) = \frac{\frac{6y_0}{y_0^2+9} - \left(\frac{-2y_0}{y_0^2+1}\right)}{\frac{-3y_0^2+27}{y_0^2+9} - \frac{3y_0^2-3}{y_0^2+1}} \cdot \left(x - \frac{3y_0^2-3}{y_0^2+1}\right),$$

整理可得

$$y = \frac{4y_0}{3(3-y_0^2)}x + \frac{2y_0}{y_0^2-3} = \frac{4y_0}{3(3-y_0^2)}\left(x - \frac{3}{2}\right),$$

故直线 CD 过定点 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

方法 2 设 $P(6, y_P)$, 则点 P 对应的极线方程为 $\frac{6x}{9} + y_Py = 1$, 令 $y = 0$, 则 $x = \frac{3}{2}$, 由极点与极线理论可得直线 CD 恒过点 $T\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, 如图 3 所示. 在得出结论后, 再证明 C, T, D 三点共线, 进一步验证结论的正确性. 由方法 1 得 C 的坐标为 $\left(\frac{-3y_0^2+27}{y_0^2+9}, \frac{6y_0}{y_0^2+9}\right)$,

点 D 的坐标为 $\left(\frac{3y_0^2-3}{y_0^2+1}, \frac{-2y_0}{y_0^2+1}\right)$, 则

$$\overrightarrow{CT} = \left(\frac{3}{2} - \frac{-3y_0^2+27}{y_0^2+9}, \frac{-6y_0}{y_0^2+9}\right),$$

$$\overrightarrow{DT} = \left(\frac{3}{2} - \frac{3y_0^2-3}{y_0^2+1}, \frac{2y_0}{y_0^2+1}\right).$$

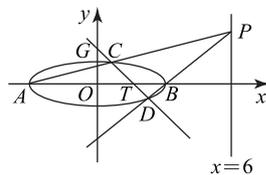


图 3

又因为

$$\left(\frac{3}{2} - \frac{-3y_0^2+27}{y_0^2+9}\right) \cdot \frac{2y_0}{y_0^2+1} - \left(\frac{3}{2} - \frac{3y_0^2-3}{y_0^2+1}\right) \cdot \frac{-6y_0}{y_0^2+9} = \frac{18y_0^3-54y_0-18y_0^3+54y_0}{2(y_0^2+9)(y_0^2+1)} = 0,$$



所以 $\overrightarrow{CT} \parallel \overrightarrow{DT}$, 即 C, T, D 三点共线, 进而可得直线 CD 恒过点 $T(\frac{3}{2}, 0)$.



点

本题常规解法(方法1)的解题思路是设出直线 PA, PB 的方程, 然后与椭圆方程联立, 利用“知点求点”的想法, 分别得出 C, D 两点的坐标, 进而求出直线 CD 的方程, 再把直线方程进行化简整理, 最后得出直线 CD 恒过定点. 这种解法思路简单明了, 但运算量较大, 而且在得出直线方程后, 不易化简得到直线恒过定点这一结论. 方法2运用极点与极线的理论能够直接得出直线恒过定点 $T(\frac{3}{2}, 0)$ 这一解目标, 有了这一目标的指引后, 我们只需证明 C, T, D 三点共线即可, 从而使所求问题得以快速解决. 通过对比两种解法, 不难发现虽然极点与极线的理论不能直接运用于解题, 但它可以帮助我们快速得出问题的答案, 在正确答案的指引下, 我们只需选取合适的解题方法, 说明这一结论的正确性即可.

5 复习指导

1) 重视圆锥曲线的定义学习.

有关圆锥曲线的很多性质或二级结论就是从圆锥曲线的定义出发引申得出的. 例如, 由椭圆的第二定义, 我们可以得出椭圆上任意一点 P 与椭圆上关于原点对称的两点 A, B 连线的斜率之积为定值, 即 $k_{PA}k_{PB} = -\frac{b^2}{a^2}$; 由双曲线的定义我们可以得出双曲线的焦点三角形内切圆圆心一定在直线 $x = a$ 或 $x = -a$ 上; 由抛物线的定义我们可以得出以抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点弦 AB 为直径的圆与准线 $x = -\frac{p}{2}$ 相切……

我们在平时的学习中, 不仅要重视教材中给出的圆锥曲线的定义, 还要深入挖掘教材的例题和习题所蕴含的圆锥曲线的其他定义. 例如, 高中数学人教 A 版新教材中, 将椭圆的第二定义和第三定义就分别以例题和课后习题的形式给出, 需要通过结论一般化的形式得出. 通过对圆锥曲线定义的深入探究, 不仅可以加深我们对圆锥曲线的几何性质和代数性质的理解, 更能够将定义的推导或验证过程中所蕴含的数学思想和解题方法运用在实际的解题中, 从而潜移默化地提升我们的数学思维能力和学科素养.

2) 学会从代数和几何两个角度去理解圆锥曲线的有关性质与二级结论.

圆锥曲线从具体的定义到方程的得出实际上就是一个数形结合的典例. 对于每一种圆锥曲线的学习, 教材都是按照先明确其几何特征, 再利用几何特征建立坐标系、求出坐标方程, 最后通过方程运用代数方法进一步认识圆锥曲线的性质. 我们在探究有关圆锥曲线的性质或二级结论时, 也要学会利用数形结合的思想, 从“数”和“形”两个角度去理解和运用这些性质和结论. 例如, 在研究抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 过焦点弦长度问题时, 可得弦长的代数形式为 $|AB| = x_1 + x_2 + p$, 几何形式为 $|AB| = \frac{2p}{\sin^2 \theta}$ (θ 为直线的倾斜角). 代数形式的得出是有关求弦长问题通性通法的应用, 有助于我们对抛物线定义的进一步理解与应用; 而几何形式有助于我们从几何角度理解, 当直线与对称轴垂直, 即倾斜角 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, $|AB|_{\min} = 2p$. 这种几何表达形式也可以自然推广到椭圆与双曲线中的弦长

公式 $|AB| = \frac{2b^2}{a(1 - e^2 \cos^2 \theta)}$, 从而有助于我们从直观上理解弦长的最值问题.

3) 心怀大局意识, 从宏观上把握与圆锥曲线性质有关的二级结论.

从圆锥曲线的性质出发可以得出的二级结论有很多, 有的结论具有通用性与对称性, 便于我们记忆、理解与运用, 但更多的二级结论是经过深入探究后得出的, 具有各自的独立性与偶然性, 并不具备便于记忆的特点. 从近几年与圆锥曲线有关的高考题的命制中, 不难发现以这些二级结论为背景命制的试题不在少数, 那么如何对待这些与圆锥曲线性质有关的二级结论, 就成为我们需要认真思考的问题. 笔者认为对于圆锥曲线中二级结论的学习, 我们可采取“理解为主, 记忆为辅; 分类总结, 宏观把握”的教学方式展开. 通过对以圆锥曲线二级结论为命题背景的高考题或模考题的分析, 不难发现这些试题的解答往往并不是这些结论的直接应用, 更多考查的是这些二级结论在推导过程中所用到的数学思想与方法. 在平时的学习中, 应该把对这些结论推导过程中所用到基本思想的领悟与基本方法的掌握放在首位, 在此基础上加以记忆.

(完)