从一道圆锥曲线焦点分弦题谈二级结论的巧用

甘肃　何少杰

二级结论源于教材中的基础知识，它是利用基本概念、基本定理，经过归纳、推理、证明，总结出来的结论；它是特定条件下一些解题步骤的有序整合.

圆锥曲线是高中阶段解析几何的重要内容，坐标法建立了方程与曲线之间的联系，为“数形结合”架起了桥梁. 虽然在教学中我们一直强调通性通法，但在解答选择题或者填空题时，如果利用通性通法联立方程，就可能会陷入繁杂的运算，如果能够灵活地利用好二级结论，就可以规避掉大量重复的计算，节省时间，提高解题效率，巧妙地解决问题. 在高考中，焦点弦问题是圆锥曲线考查中的热点，圆锥曲线中的二级结论很多，下面以一道示范性较强的焦点分弦问题为例，通过多种解法对比，来说明利用圆锥曲线中常用的二级结论解决问题的高效性，体会由一题多解到多解归一的过程.

一、试题呈现

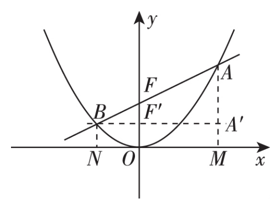
已知 A，B 为抛物线 $x^2=4y$ 上不同的两点，且直线 AB 的倾斜角为锐角，F 为抛物线的焦点，若 $\overrightarrow{FA}=-2\overrightarrow{FB}$，则直线 AB 的斜率为________.

解法 1：设直线 AB 的斜率为 k，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由题意知 $x_1>0$，$x_2<0$. 联立方程 $\begin{cases}y=kx+1,\\x^2=4y,\end{cases}$ 整理得 $x^2-4kx-4=0$，由韦达定理得 $x_1+x_2=4k$，$x_1\cdot x_2=-4$，又 $\overrightarrow{FA}=-2\overrightarrow{FB}$，因为 $F(0,1)$，所以 $x_1=-2x_2$，解得 $x_1=2\sqrt{2}$，$x_2=-\sqrt{2}$，$k=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

评析：代数方法求解此题时，为避免反复计算，使用韦达定理与向量知识整合是一种不错的方法，而且也是通性通法，但这样的解答并无亮点，有些同类题目可能运算量会比较大，浪费时间.

解法 2：

由题意作出抛物线图象（如图），设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由题意知 $x_1>0$，$x_2<0$. 作 AM，BN 垂直于 x 轴，$A'B$ 平行于 x 轴交 y 轴于点 F'. $|FF'|=1-y_2$，$|AA'|=y_1-y_2$，因为 $\triangle BFF'\backsim\triangle BAA'$，所以 $\frac{|FF'|}{|AA'|}=\frac{|BF'|}{|BA'|}=\frac{|BF|}{|BA|}=\frac{1}{3}$，则 $\begin{cases}3(1-y_2)=y_1-y_2,\\3(-x_2)=x_1-x_2,\end{cases}$ 又 $\begin{cases}x_1^2=4y_1,\\x_2^2=4y_2,\end{cases}$ 联立方程可得 $y_2=\frac{1}{2}$，$x_2=-\sqrt{2}$，由斜率公式得 $k=\frac{\sqrt{2}}{4}$.



评析：本题虽然使用了数形结合的方法，但未找到解题的捷径，显然比较烦琐.

解法 3：$|AF|=y_1+\frac{p}{2}$，$|BF|=y_2+\frac{p}{2}$，由题知 $y_1>y_2$，所以 $|AF|-|BF|=y_1-y_2$ ①，$|AF|=2|BF|$ ②，由①②得 $|BF|=y_1-y_2$，$|AF|=2(y_1-y_2)$，$|AB|=|AF|+|BF|=3(y_1-y_2)$，由弦长公式 $|AB|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}|y_1-y_2|$，所以 $\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}=3$，因为直线 AB 的倾斜角为锐角，所以 $k=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

评析：这一解法使用了两个公式：焦半径公式、弦长公式，解法很有技巧，渗透了函数与方程思想，与圆锥曲线中常用的设而不求方法，看似巧妙，但事实上仍是通性通法的灵活运用，虽然回归了定义，但仍显烦琐，除了函数方程思想外，解析几何还讲究“数形结合”，巧妙使用平面几何知识

往往能加快解题速度.

解法4:由题意不妨设 $|AF|=2a$,$|BF|=a$,$|AB|=|AF|+|BF|=3a$.由圆锥曲线第二定义可知 $|AM|+\frac{p}{2}=2a$,$|BN|+\frac{p}{2}=a$,$|AA'|=|AM|-|BN|=a$,所以在 $\mathrm{Rt}\triangle ABA'$ 中,$|AB|=3a$,$|AA'|=a$,$|A'B|=2\sqrt{2}a$,所以 $k=\frac{|AA'|}{|A'B|}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

评析:借助圆锥曲线的第二定义,同时使用了数形结合的方法,直观易懂,在解决选择、填空一类题型时较好.

解法5:过点 $M_0(x_0,y_0)$,倾斜角为 α 的直线的参数方程为 $\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha,\\ y=y_0+t\sin\alpha\end{cases}$ (t 为参数),其中 $|t|$ 表示直线上的动点 M 到定点 $M_0(x_0,y_0)$ 的距离,且当 $\overrightarrow{M_0M}$ 方向向上时 $t>0$,$\overrightarrow{M_0M}$ 方向向下时 $t<0$,由以上直线参数方程的知识,可以求解此题.

直线 AB 的参数方程为 $\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\ y=1+t\sin\alpha\end{cases}$ (t 为参数),代入抛物线方程 $x^2=4y$,

得 $\cos^2\alpha\cdot t^2-4\sin\alpha\cdot t-4=0$,

设 $|AF|=|t_1|$,$|BF|=|t_2|$,可知 $t_1>0$,$t_2<0$,$t_1=-2t_2$.

由韦达定理得 $t_1+t_2=\frac{4\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$①,$t_1\cdot t_2=\frac{-4}{\cos^2\alpha}$②,又 $t_1=-2t_2$③,解得 $t_2=-\frac{\sqrt{2}}{\cos\alpha}$,代入①得 $\frac{\sqrt{2}}{\cos\alpha}=\frac{4\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$,$\tan\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}$,即 $k=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

评析:以上解法除解法1外,其余方法技巧性较强,不是通性通法,适用范围受到限制,而解法1为通性通法,以代数方法为主,运算较为烦琐,解法4是最为巧妙的方法,那么能否借助解法4找到一种普遍使用的公式解决圆锥曲线中焦点分弦一类问题呢?

二、利用二级结论,高效解题

以此题为背景,对圆锥曲线进行进一步的探索,利用已有的二级结论,获得求解焦点分弦一类题型的一般性方法,从而有效避免繁杂的计算.

结论1:圆锥曲线的焦点为 F,离心率为 e,焦点 F 分弦 AB,AB 与 x 轴所成的角为 $\theta\left(\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$,且 $|AF|=\lambda|BF|(\lambda>0)$,则有如下结论:

1. 对于横向型圆锥曲线

(1)焦点 F 内分弦 AB 时,$\cos\theta=\frac{1}{e}\left|\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right|$.

(2)焦点 F 外分弦 AB(仅限双曲线)时,$\cos\theta=\frac{1}{e}\left|\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right|$.

2. 对于纵向型圆锥曲线

(1)焦点 F 内分弦 AB 时,$\sin\theta=\frac{1}{e}\left|\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right|$.

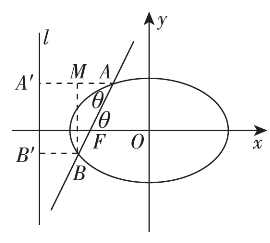
(2)焦点 F 外分弦 AB(仅限双曲线)时,$\sin\theta=\frac{1}{e}\left|\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right|$.

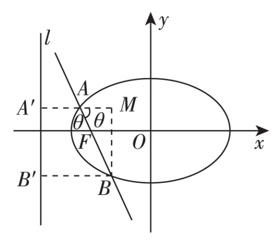
下面对这一二级结论进行证明.

证明:设 l 为圆锥曲线焦点 F 所对应的准线,点 A,B 在 l 上的射影分别为 A',B',点 B 在 $A'A$ 上的射影为 M,设 $|AF|=a$,$|BF|=b$,$|AA'|=m$,$|BB'|=n$,由圆锥曲线的第二定义,$\frac{a}{m}=\frac{b}{n}=e$,又 $a=\lambda b(\lambda>0)$,所以 $n=\frac{b}{e}$,$m=\frac{a}{e}=\frac{\lambda b}{e}$.

1. 对于横向型圆锥曲线

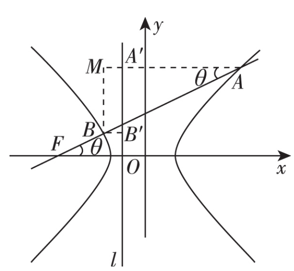
(1)当焦点 F 内分弦 AB 时,以椭圆为例进行证明:

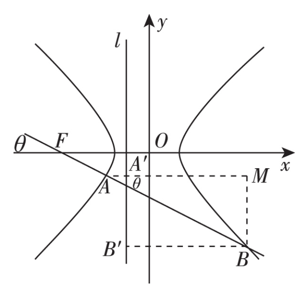




由图可知,$\cos\theta=\frac{|AM|}{|AB|}=\frac{|AA'-BB'|}{|AF+BF|}=\frac{|m-n|}{|a+b|}=\frac{1}{e}\left|\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right|$.

(2)当焦点 F 外分弦 AB 时,此时曲线为双曲线.

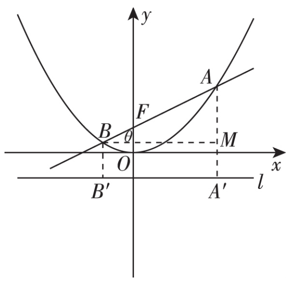


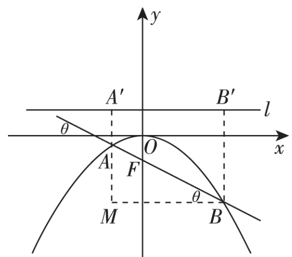


由图可知，$\cos\theta=\dfrac{|AM|}{|AB|}=\dfrac{|AA'+BB'|}{|AF-BF|}=\dfrac{|m+n|}{|a-b|}=\dfrac{1}{e}\left|\dfrac{\lambda+1}{\lambda-1}\right|$.

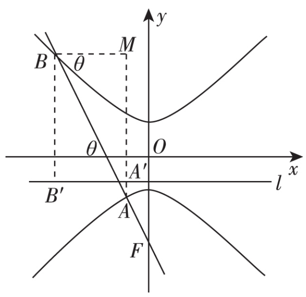
2. 对于纵向型圆锥曲线

(1)当焦点 F 内分弦 AB 时，以抛物线为例，由图可知，$\sin\theta=\dfrac{|AM|}{|AB|}=\dfrac{|AA'-BB'|}{|AF+BF|}=\dfrac{|m-n|}{|a+b|}=\dfrac{1}{e}\left|\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}\right|$.





(2)当焦点 F 外分弦 AB 时，曲线为双曲线.



由图可知，$\sin\theta=\dfrac{|AM|}{|AB|}=\dfrac{|AA'+BB'|}{|AF-BF|}=\dfrac{|m+n|}{|a-b|}=\dfrac{1}{e}\left|\dfrac{\lambda+1}{\lambda-1}\right|$，证毕.

以上讨论均是在平面直角坐标系中去研究圆锥曲线的焦点分弦问题的，不妨在极坐标系中去探讨此类题目的求解方法. 由圆锥曲线的第二定义，建立以 F 为极点，焦点所在轴的正方向为极轴的极坐标系. 可得到圆锥曲线统一的极坐标方程 $\rho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$($\rho$ 为极径，θ 为极角，p 表示焦准距).

根据圆锥曲线的极坐标方程易得以下结论：

结论 2：圆锥曲线的焦点为 F，离心率为 e，焦点 F 分弦 AB，AB 与 x 轴所成的角为 $\theta\left(\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]\right)$，则有如下结论：

1. 对于横向型圆锥曲线

长焦半径为 $\left|\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}\right|$，短焦半径为 $\left|\dfrac{ep}{1+e\cos\theta}\right|$.

2. 对于纵向型圆锥曲线

长焦半径为 $\left|\dfrac{ep}{1-e\sin\theta}\right|$，短焦半径为 $\left|\dfrac{ep}{1+e\sin\theta}\right|$.

这一结论的证明这里不再赘述. 结论 1，2 揭示了圆锥曲线焦点分弦的一些性质及特征，对于求解圆锥曲线中焦点分弦一类问题大有裨益，不妨运用结论 1，2，继续求解此题.

解法 6：经判断该抛物线为纵向型，焦点内分弦，$|AF|=2|BF|$，设 AB 与 x 轴所成的角为 θ，由题意知 $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以 $\sin\theta=\dfrac{1}{e}\left|\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}\right|=\dfrac{1}{3}$，$\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$k=\tan\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

解法 7：该抛物线为纵向型，设 AB 与 x 轴所成的角为 $\theta\left(\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$，$|AF|=2|BF|$，较长焦半径 $|AF|=\left|\dfrac{ep}{1-e\sin\theta}\right|$，较短焦半径 $|BF|=\left|\dfrac{ep}{1+e\sin\theta}\right|$；又 $e=1$，所以有 $2(1-\sin\theta)=1+\sin\theta$，$\sin\theta=\dfrac{1}{3}$，$\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，所以 $k=\tan\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

评析：与前面五种解法相比，结论 1，2 的使用大大的减少了此类题目的运算量，可以起到化繁为简的作用，达到事半功倍的效果，而且也是求解此类题目的统一简解，是通性通法的使用.

结语：数学学习应注重探究，注重一题多解，通过多角度、多途径分析和解决问题，能够激发学生的学习热情，亦能增进对数学概念的理解，提高解决数学问题的能力，指引我们找到多题一解的通性通法. 因此我们在平时的教学与学习过程中应该多视角、多方位去分析问题，唯有这样才能拓展思路，提高能力，做到懂一题会一类，最终真正做到多解归一. 在计算量比较大的圆锥曲线教学中教师要善于归纳总结，拓展延伸，引导学生积累一些常用的二级结论，在做选择题或填空题时可以直接使用，在做解答题时，可以在列方程之后提前预知结果，从而提高解题水平，提升思维能力和数学素养.

(作者单位：甘肃省天水市清水县第六中学)