高三二轮“微专题”复习课的设计与思考

——以“数列与不定方程整数解问题”的教学为例

周星月　（江苏省南京市中华中学　210019）

二轮复习是整个高三复习的一个重要环节，相对于一轮复习的重基础、讲知识、建体系而言，二轮复习的关键在于知识点再次深入、重难点寻求突破、思想方法交融升华.微专题因具实效性、针对性、灵活性、细致性、深刻性的特点，近年来正成为大家广泛认同的二轮复习模式.微专题的质量直接影响二轮复习的效果，因而微专题如何选择、微专题教学如何实施自然成为了高三教师关注的话题.本文结合笔者的教学实际，以“数列与不定方程整数解问题”的教学为例，谈谈笔者对微专题复习课的思考.

1　微专题与微专题的设置

1.1　微专题

微专题通常立足于学情、教情、考情，是围绕复习的重点知识和关键点设计、利用若干紧密相关的知识或思想方法形成的专项研究，或是结合学生的疑点和易错点整合的、能够在短时间内解决的问题集.

1.2　二轮复习微专题的内容设计

二轮复习要求做到：夯实基础，查漏补缺；抓住主干，突出重、难点；提升能力，关注热点.为此，笔者认为可以从以下几方面入手，选取适合学生二轮复习的微专题.

（1）基于考点选取的微专题：围绕教材的主干内容以及高考的热点、重点知识，打破书本章节原有的知识体系设置微专题，就考试重点细化重组，提升针对性.具体而言：围绕考纲中的8个C级考点进行设计，如直线与圆、基本不等式的深度研究；围绕近几年高考中出现的热点问题进行设计，如复合函数的零点问题等.

（2）挖掘生长点的微专题：关注知识的整合和联系，探寻其本源，挖掘生长点，尤其是能主动地与别的知识点联接，揭示所学知识的背景.例如，2016 年南京市一模第 20 题，学生解答得并不理想，其实这道题的“生长点”就是倒叙相加思想，在教材的向量部分就已经渗透，在学习“等差数列求和”和“二项式定理”时得到巩固.教师可由这样的“点”入手设计微专题，串点成线，将教材知识点不断外延.

（3）解决易错点的微专题：“常做，常讲，常错”的重、难点知识，究其原因，是学生没有真正理解.教师可以以这些错误为基础，挖掘错误背后的知识漏洞和思维缺陷，精设微专题.例如，换元法的灵活运用一直是学生学习的难点、易错点，可设计微专题将教材中涉及换元法的内容串联起来，集中讲练.

（4）关注突破点的微专题：高考不仅考查对知识点的掌握情况，对数学能力的考查也十分重视，因而可以设置解题方法、解题思想类的微专题，关注解决一类问题的突破点.例如，“数列与不定方程整数解问题”是数列存在性问题的一种常见类型，是多年考试的热点，对学生逻辑思维能力、代数推理能力要求较高，常让学生感到无从下手.笔者针对解决不定方程整数解问题的方法、思想设置微专题，通过不同侧面的模型构建，让学生掌握数列与不定方程整数解问题的常用处理策略，提升学生分析、转化、解决问题的能力.

2　微专题的实施过程设计——以微专题“数列与不定方程整数解问题”为例

2.1　基础铺垫，梳理基本方法

问题 1　已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2^n$，是否存在正整数$p,q,r(p<q<r)$，使得a_p，a_q，a_r成等差数列？请说明理由.

生 1：假设存在$p,q,r(p<q<r)\in\mathbf{N}^*$满足要求，则$2\cdot 2^q=2^p+2^r(*)$，等式两边同除最小公因式$2^p$，得$2^{q+1-p}=1+2^{r-p}$，因为$p,q,r(p<q<r)\in\mathbf{N}^*$，所以$q+1-p,r-p\in\mathbf{N}^*$，所以左式是偶数，右式是奇数，矛盾.

生 2：$(*)$式两边同除以 2，整理得$2-2^{r-q}=\dfrac{1}{2^{q-p}}(**)$，因为$p,q,r(p<q<r)\in\mathbf{N}^*$，所以左式是正整数，右式是真分数，矛盾.

生 3：$(**)$式中，$r-q\geqslant 1,q-p>0$，所以

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$2-2^{r-q}\leqslant 0,\frac{1}{2^{q-p}}>0$,矛盾.

教师用“希沃教学助手”展示采集的学生解答过程,规范书写格式.

师:一般地,不定方程正整数解无解的情况如何处理?

生 4:考虑等式两边的“范围”是否一致,如:从奇数与偶数、整数与分数、正数与负数角度得到矛盾,进而判断方程无解.

评析　问题 1 是一个既典型又不复杂的不定方程整数解问题,留足时间让学生自己思考、讲解思路,一题多解,激发学生的学习兴趣.教师通过展示学生的解答点拨方法、纠正错误、规范格式,对不定方程正整数解无解类型的问题进行方法梳理,引导学生将知识条理化、网格化.课堂教学中,能让学生表达的尽量让学生表达,能让学生思考的教师就不要代替,只有经过学生思考所得的,才能转化为其内在的能力.

2.2　逐步深化,强化方法意识

问题 2　已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2n-1$,求正整数 m,k,使得 $a_m+a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{m+k}=65$.

生 5:求和公式代入整理得 $a_m+a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{m+k}=(k+1)(2m+k-1)=65(*)$.

师:非常好!明确不定方程.下面如何处理?

生 5:变量分离,$2m=\frac{65}{k+1}-k+1$,$k+1$ 为 65 的约数,逐个检验即可.

师:很好!生 5 观察方程结构形式,化归为整除性质中的约数讨论.还有没有其他做法?

生 6:由$(*)$式因式分解,直接讨论 $k+2m-1$,$k+1$ 为 65 的约数.

师:能否不讨论?

生 6(思考片刻后):缩小范围,因为 $k+2m-1\geqslant k+1>1$,只可能$\begin{cases}k+1=5,\\2m+k-1=13.\end{cases}$

师:生 6 利用因式分解的方法,结合变量范围控制,简化了讨论,非常好.

问题 3　已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\frac{n}{2n+1}$,是否存在正整数 $m,n(1<m<n)$,使得 a_1,a_m,a_n 成等比数列?若存在,求出所有的 m,n 的值;若不存在,请说明理由.

生 7:化简得 $\left(\frac{m}{2m+1}\right)^2=\frac{1}{3}\left(\frac{n}{2n+1}\right)$,即 $\frac{m^2}{4m^2+4m+1}=\frac{n}{6n+3}$,变量分离得 $\frac{3}{n}=\frac{-2m^2+4m+1}{m^2}$,从而 $-2m^2+4m+1>0$,得 $1-\frac{\sqrt{6}}{2}<m<1+\frac{\sqrt{6}}{2}$.又 $m\in\mathbf{N}^*$,且 $m>1$,所以 $m=2,n=12$.

生 8:因为 $\frac{n}{6n+3}=\frac{1}{6+\frac{3}{n}}<\frac{1}{6}$,故 $\frac{m^2}{4m^2+4m+1}<\frac{1}{6}$,即 $2m^2-4m-1<0$.下同生 7.

评析　例题精讲是微专题的核心部分,也是学生思维提升的主要环节.问题 2、3 均是可从多角度认识和解决的例题,具有一定的思维含量,有深入探究的价值.一题多解,让学生参与讨论、总结规律、归纳方法、感悟技巧,师生共同总结出可以通过整除性(约数)、因式分解、范围控制等方法处理不定方程正整数解存在类的问题.

问题 4　已知数列$\{a_n\}$的满足 $\lg a_n=\frac{n}{3^n}$,是否存在正整数 p,q(其中 $1<p<q$),使得 a_1,a_p,a_q 成等比数列?若存在,求出所有满足条件的数组(p,q);若不存在,说明理由.

生 9:化简得到不定方程$\frac{2p}{3^p}=\frac{1}{3}+\frac{q}{3^q}$,等式两边同乘 3^q,得 $2p\cdot 3^{q-p}=3^{q-1}+q$,知 q 为奇数.下面不会处理了.

师:数列比较抽象时,如何具体化?

生 9:列几项试试,$p=2,\frac{2p}{3^p}=\frac{4}{9}$;$p=3,\frac{2p}{3^p}=\frac{2}{9}$;$p=4,\frac{2p}{3^p}=\frac{8}{81}$.

师:有什么发现?

生 9:$\frac{2p}{3^p}$ 单调递减,$p\geqslant 3$ 时,$\frac{2p}{3^p}<\frac{1}{3}$,不满足条件,只可能 $p=2$.

师:如何证明单调性?

生 9:用数列单调的定义,$\frac{2(p+1)}{3^{p+1}}-\frac{2p}{3^p}=\frac{2(1-2p)}{3^{p+1}}<0$.

师:如何求 q 呢?

生 9:$p=2$,故$\frac{4}{9}=\frac{1}{3}+\frac{q}{3^q}$,再利用单调性可

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

知 $q=3$.

师:太棒了,生 9 从特殊到一般,发现单调性,从而控制变量范围.

评析　问题 4 对学生思维要求较高,笔者设计了一连串从易到难的"问题链",逐步启发渗透特殊到一般的思想,让学生探索规律,发现单调性,强化控制范围的方法.把学生引入"思考者"的角色,让他们经过思考获得结果,暴露学生思维过程、研究过程.学生在层层的问题设置中有一定的自我修正能力,这对学生的思维品质提高是非常有效的.

2.3　归纳小结,形成解题框架

师:通过今天这节课的学习,你有什么收获?

生 10:我了解到对于数列与不定方程整数解问题,针对是否存在解,可作如下处理:

不存在 —— 找矛盾存在 $\begin{cases}\text{奇数与偶数;}\\\text{整数与分数;}\\\text{正数与负数;}\\\text{有理数与无理数.}\end{cases}$

存在 —— 缩小范围 $\begin{cases}\text{整除性(约数);}\\\text{因式分解;}\\\text{范围控制.}\end{cases}$

评析　总结、升华,让学生在一节微专题课后能够收获一些思想性、规律性的知识,形成良好的知识网络,这样学生再遇问题时才能顺利地逢山开路、遇水搭桥.在微专题的教学过程中,笔者建议用学生归纳的方式来进行课堂小结,教师引领学生回顾整节课的学习、研究过程,明确所研究的内容、方法.积极发挥学生的主观能动性,使学生在"学会"的基础上,逐步做到"会学".

2.4　真题训练,巩固教学效果

问题 5　已知数列 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$ 满足 $a_n=n\cdot 2^{n+1}$,$b_n=\dfrac{n(n+3)}{2}$,若存在整数 m,$n(m>n>1)$,使得 $\dfrac{a_m}{a_n}=\dfrac{m(b_m+\lambda)}{n(b_n+\lambda)}$,其中 λ 为常数,且 $\lambda\geqslant -2$,求 λ 的所有可能值.

评析　畅销书《异类》提出"练习一万小时成天才"的口号,已在各个行业被广泛证实."刻意训练"同样适用于数学教学:例题讲解应充分启发思维,给学生以好的思维导向,但一旦形成这样的思维,又应通过及时的练习来巩固和应用,完成"知识的迁移".笔者精选最近几年的模考题、高考题,有效整合,提炼出与本专题密切相关的问题,作为巩固练习.

3　基于核心素养的二轮复习微专题教学思考

《普通高中课程标准(2017 年版)》指出:高中教学要以发展学生的核心素养为导向,数学核心素养是数学课程目标的集中体现.核心素养的提升是日积月累的结果,基于核心素养的二轮复习微专题教学应整体设计、分步实施,要为形成和发展核心素养提供助力.

3.1　微专题的教学应发挥学生在复习中的主体地位

教师在设计和组织二轮复习时,应落实"以学生为本"的教育理念,突出学生的主体作用,从而培养学生的数学核心素养,发展学生的创新意识,提高学生终身学习的能力.

(1)因学施教:每个学校甚至每个班级的学生不同,复习的薄弱环节也不尽相同,微专题的选择要具有针对性,起点适度,内容适量.面对学生普遍感觉较难的一类数列存在性问题,课例只选择涉及不定方程整数解问题基本方法、思想的四个问题,由浅入深、由易到难,帮助学生树立解题信心,实现步步登高;用希沃教学助手展示学生解答,有针对性地进行讲解.

(2)注重学生(思维)活动参与:二轮复习不能因为课时紧、赶进度,而忽略学生的学习感受,应该让学生在经历分析、探究与解决问题的过程中学习、领悟数学.微专题的设计应关注让学生亲身经历什么活动、解决什么问题、对问题进行哪些思考与探索.课例采用先解答再讲评的策略,注重学生思维的暴露与分析,给学生留足思维空间和表达时间,带领学生进行求不定方程整数解方法的比较、辨析与归纳,从学生的角度去进行真正的查漏补缺.

3.2　微专题的教学应以"问题串"驱动

问题串是围绕一个核心知识内容或主题按一定的逻辑结构设置的一组问题.设置问题串是编制微专题的有效策略,它能把学生认知、思维、情感有机地统一在课堂互动中,让学生在掌握知识的同时提高自身的思维能力,培养数学核心素养.具体而言:

(1)贯通思维活动.精心编制的问题串、多梯度的问题预设、多角度的问题引导,把微专题中看似零散的概念、方法有机地渗透在问题探究的全过程,依托问题串辐射出学生丰富的、深层的思维活动,也自然地衍生出完整的知识结构.微专题建构可用以下结构模式的问题串:

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

结构	内涵与特点	优势及适用举例
递进式	问题难度不同，一般由易到难，层层递进	分解难度，促进思维向深度、广度发展（如本课例）
并列式	问题没有主次之分，是相互并列的逻辑关系	多角度认识同一概念、方法，便于对比
延展式	问题在逻辑上存在总分关系，在解决一个中心问题时进行一系列的问题的拓展延伸	网络化、系统化知识梳理，如一题多解问题
总结式	从不同的既相关又独立的几个问题分别研究，分析差异，归纳类比，找出共性	问题较抽象或涉及范围较大时，便于概括本质特征，如多题一解问题

（2）渗透思想方法.全面培养数学能力的主要途径是培养学生的数学思维能力，高考考纲要求数学知识与数学思想方法的考查并重.微专题的教学过程中，教师应让思维呈立体状、多维度、由点到面，通过“问题串”的拓展，使数学思维能力得到更深度的训练和提高.如课例中笔者以问题串引导学生观察方程结构特征，将化归与转化的思想落到实处.

（3）激发思考兴趣.利用富有思考性和挑战性的问题串，让学生独立自主地发现、解决问题，可以激发学生探究的兴趣，培养学生的探索精神和创新能力.教师基于微专题的逻辑顺序提一些开放式的问题，利用变式教学、一题多解、多题一法，引导学生发散思考，唤起学生的好奇心和求知欲，产生主动参与的学习动力，保持其参与活动的兴趣和热情.

（4）启迪思路方向.针对教学中的重、难点问题，教师应预设问题串启发学生思考，使学生在学习知识的同时学会如何思考问题，“授之以渔”，如课例中教师处理问题 4 时的引导过程.

（上接第 6 页）

两角和的余弦公式，对于两角差的余弦公式可以同理得到.得到两个公式后引导学生发现两个公式之间的转化关系.至此难点逐一得以突破.

3.2 教学反思

（1）课堂教学要通过设计教学主线推进教学进程

基于整章教学要求的考虑，本节课将“两角和的余弦公式的探究”作为课堂教学的明线，核心指导思想——转化思想作为一条暗线来推进课堂教学.本节课一开始就让学生求 15° 和 75° 的余弦值，学生就能想到转化为特殊角去处理.在后面公式推导的过程中，通过设计问题串引导学生在参与公式推导的探究活动中，深刻体会未知角向已知角的转化，体会未知值向已知值的转化以及未知范围向已知范围的转化等，切实理解公式产生的来龙去脉、结构特征与内在联系，从而有助于学生熟练、灵活地驾驭公式，切实提高课堂教学的有效性[1].

（2）课堂教学要引导学生通过多种思路探究公式

本节课由于面对的学生没有学习向量知识，所以只能选择几何法证明两角和与差的余弦公式，并且选择了两角和的余弦公式证明作为本节课的重点，这是本节课在公式推导方面的一点遗憾.如果学习了向量，则可以通过代数法（向量法）和几何法推导出两角和与差的公式，两种推导方法（代数与几何）相得益彰，充分凸显向量方法的工具作用，让学生在公式的推导和探究过程中体验、感受数学发现和创造的快乐，体会向量和三角函数间的联系，从而有效地培育学生的数学思维能力和数学核心素养.

（3）课堂教学要指导学生自主总结探究问题的方法

通过本节课的学习，我们也要为学生归纳总结出一个探究问题的思路和方法：① 善于运用已学过的知识，将研究的新问题转化为已学过的知识进行处理和解决；② 知识体系建构要由浅入深、循序渐进、逐步推进，由学生自主探究、自主建构自己的知识体系.我们认为这种探究数学问题的方法符合学生的认知规律.后续新公式的探究就可以放手让学生去自主探究，这对学生自主建构公式网络体系、培养自学能力给予了很好的方法上的指导，这才是本节课教学中最应该让学生掌握的东西.

参考文献

［1］ 臧立本.两角和与差的余弦公式教学实录与反思［J］.中学数学月刊，2010（4）：5-7.

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net