求数列通项公式的十种常见题型

田素伟

(上海市泥城中学,上海 201300)

摘　要:文章介绍了几种常见的数列通项的求法,用取对数、取倒数、因式分解、待定系数法、构造函数等方法转化为等差数列或等比数列进行求解.

关键词:数列通项;等比数列;等差数列

中图分类号:G632　　文献标识码:A　　文章编号:1008-0333(2023)34-0020-05

数列是高考的必考内容,而数列的通项公式是数列的核心.如果题目中没有直接给出数列是等差数列或等比数列,如何把题目中的条件通过变形转化为等差数列或等比数列,进而正确地求出数列的通项公式?下面介绍几种常见的数列通项公式的求法.

1 直接利用等差(等比)数列的通项公式

例1　已知数列$\{a_n\}$的各项均为正数,$a_1=1$,$a_{n+1}+a_n=\dfrac{1}{a_{n+1}-a_n}$,$n\in\mathbf{N}^*$,求数列$\{a_n\}$的通项公式.

分析　本题经过变形化为$a_{n+1}^2-a_n^2=1$,可以直接利用等差数列的通项公式求解.

解析　数列$\{a_n\}$的各项均为正数,$a_{n+1}+a_n=\dfrac{1}{a_{n+1}-a_n}$,$a_1=1$,可得$a_{n+1}^2-a_n^2=1$.

所以数列$\{a_n^2\}$是以1为公差,1为首项的等差数列.

所以$a_n^2=1+(n-1)=n$.

所以$a_n=\sqrt{n}$.

变式　已知正项数列$\{a_n\}$中,$a_1=2$,$a_{n+1}=(\sqrt{a_n+2}+1)^2-2$,$n\in\mathbf{N}^*$,求数列$\{a_n\}$的通项公式.

分析　因为已知递推式中含$\sqrt{a_n+2}$,所以要在原递推等式中构造出$\sqrt{a_{n+1}+2}$,在等式的两边同时加2,再利用等差数列的通项公式可得.

解析　因为$a_{n+1}=(\sqrt{a_n+2}+1)^2-2$,

所以$a_{n+1}+2=(\sqrt{a_n+2}+1)^2$.

两边同时开平方,得

$\sqrt{a_{n+1}+2}=\sqrt{a_n+2}+1$.

所以$\sqrt{a_{n+1}+2}-\sqrt{a_n+2}=1$.

所以数列$\{\sqrt{a_n+2}\}$是以2首项,1为公差的等差数列.

所以$\sqrt{a_n+2}=2+(n-1)\times1=n+1$.

所以$a_n=n^2+2n-1$.

收稿日期:2023-09-05

作者简介:田素伟,中学高级教师,从事中学数学教学研究.

2 用待定系数法求数列的通项公式

例2 数列$\{a_n\}$满足$a_n=2a_{n-1}+3(n\geqslant 2)$且$a_1=1$,$n\in \mathbf{N}^*$,求数列$\{a_n\}$的通项公式.

解析 由$a_n=2a_{n-1}+3(n\geqslant 2)$,可设

$a_n+x=2(a_{n-1}+x)(n\geqslant 2)$,

则$a_n=2a_{n-1}+x(n\geqslant 2)$.

比较系数可得$x=3$.

所以$a_n+3=2(a_{n-1}+3)(n\geqslant 2)$.

故$\{a_n+3\}$是以4为首项,2为公比的等比数列.

所以$a_n+3=4\times 2^{n-1}=2^{n+1}$.

所以$a_n=2^{n+1}-3$.

点评 形如$a_{n+1}=Aa_n+B(A\neq 1$且$B\neq 0)$或$a_{n+1}=Aa_n+B^n(A\neq 1$且$B\neq 0)$,A,B均为常数的等式,常用待定系数法转化为等比数列再求通项公式.

变式 已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=2a_n+3^n$且$a_1=1$,$n\in \mathbf{N}^*$,求数列$\{a_n\}$的通项公式[1].

解析 把等式$a_{n+1}=2a_n+3^n$的两边同时除以3^{n+1},得$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\dfrac{2a_n}{3^{n+1}}+\dfrac{1}{3}$.

设$b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$,那么$b_{n+1}=\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}$.

所以$b_{n+1}=\dfrac{2}{3}b_n+\dfrac{1}{3}$.

设$b_{n+1}+x=\dfrac{2}{3}(b_n+x)$.

所以$b_{n+1}=\dfrac{2}{3}b_n-\dfrac{1}{3}x$.

比较系数可得$x=-1$.

所以$b_{n+1}-1=\dfrac{2}{3}(b_n-1)$.

所以数列$\left\{\dfrac{a_n}{3^n}-1\right\}$是以$b_1=\dfrac{a_1}{3^1}-1=-\dfrac{2}{3}$为首项,以$\dfrac{2}{3}$为公比的等比数列.

所以$\dfrac{a_n}{3^n}-1=-\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$.

所以$a_n=3^n-2^n$.

3 构造特征函数

例3 数列$\{a_n\}$满足$a_n=4a_{n-1}+3(n\in \mathbf{N}^*,n\geqslant 2)$且$a_1=0$,求数列$\{a_n\}$的通项公式.

解析 设$f(x)=4x+3$,令$x=4x+3$,解得$x=-1$.

由$a_n=4a_{n-1}+3(n\geqslant 2)$,

$a_n-(-1)=4a_{n-1}+3-(-1)$.

所以$a_n+1=4(a_{n-1}+1)$.

所以$\{a_n+1\}$是以1为首项,4为公比的等比数列.

所以$a_n+1=4^{n-1}$.

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=4^{n-1}-1$.

变式 数列$\{a_n\}$中,a_n是1和a_na_{n+1}的等差中项,$a_1=2$,$n\in \mathbf{N}^*$,求数列$\{a_n\}$的通项公式.

解析 因为a_n是1和a_na_{n+1}的等差中项,

所以$2a_n=1+a_na_{n+1}$.

所以$a_{n+1}=\dfrac{2a_n-1}{a_n}$.

设$f(x)=\dfrac{2x-1}{x}$,令$x=\dfrac{2x-1}{x}$,解得$x=1$.

所以$\dfrac{1}{a_{n+1}-1}=\dfrac{1}{(2a_n-1)/a_n-1}=\dfrac{1}{a_n-1}+1$.

所以$\dfrac{1}{a_{n+1}-1}-\dfrac{1}{a_n-1}=1$.

所以数列$\left\{\dfrac{1}{a_n-1}\right\}$是以$\dfrac{1}{a_1-1}=1$为首项,以1为公差的等差数列.

所以$\dfrac{1}{a_n-1}=1+(n-1)$.

所以$a_n=1+\dfrac{1}{n}$.

点评 本题首先利用构造函数求函数的不动

点,如果函数 $f(x)=\frac{2x-1}{x}$ 有两个不动点,那么可以转化为数列 $\left\{\frac{1}{a_n-1}\right\}$ 是以 $\frac{1}{a_1-1}=1$ 为首项,以1为公差的等差数列.

4 对于周期数列先求其周期

例4 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=2$, $a_{n+1}=\frac{1+a_n}{1-a_n}$, $n\in\mathbf{N}^*$,求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解析 由题意可知 $\{a_n\}$ 的特征函数是 $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$,由 $f(x)=\frac{1+x}{1-x}=x$,得 $x^2+1=0$,解得 $x_1=\mathrm{i}$, $x_2=-\mathrm{i}$,可知数列 $\{a_n\}$ 是周期数列.

因为 $a_{n+1}=\frac{1+a_n}{1-a_n}$,

所以 $a_{n+2}=\frac{1+a_{n+1}}{1-a_{n+1}}=\frac{1+(1+a_n)/(1-a_n)}{1-(1+a_n)/(1-a_n)}=\frac{1-a_n+1+a_n}{1-a_n-(1+a_n)}=-\frac{1}{a_n}$.

所以 $a_na_{n+2}=-1$.

所以 $a_{n+4}a_{n+2}=-1$.

所以 $a_{n+4}=a_n$.

所以数列 $\{a_n\}$ 的周期为4.

因为 $a_1=2$,

所以 $a_2=\frac{1+a_1}{1-a_1}=-3$, $a_3=-\frac{1}{2}$, $a_4=\frac{1}{3}$,

$$a_n=\begin{cases}2, n=4k+1,\\-3, n=4k+2,\\-\frac{1}{2}, n=4k+3,\\\frac{1}{3}, n=4k.\end{cases}(k\text{ 是非负整数}).$$

5 递推关系式两边取对数

已知的递推关系式含幂指数或乘积的形式时,利用取对数方法进行变形转化为等差数列或等比数列,再求其通项公式.

例5 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_{n+1}=2^na_n$, $n\in\mathbf{N}^*$,求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解析 因为 $a_{n+1}=2^na_n$, $a_1=1$,所以 $a_n>0$.

两边同时取以2为底的对数,得

$\log_2a_{n+1}=\log_22^na_n$.

所以 $\log_2a_{n+1}=\log_2a_n+n$.

设 $b_n=\log_2a_n$,则 $b_{n+1}=\log_2a_{n+1}$.

所以 $b_{n+1}=b_n+n$.

所以 $b_{n+1}-b_n=n$.

所以 $b_2-b_1=1$,

$b_3-b_2=2$,

$b_4-b_3=3$,

…………

$b_n-b_{n-1}=n-1$.

以上各等式两边分别相加可得

$b_n-b_1=1+2+3+\cdots+n-1=\frac{n(n-1)}{2}$.

所以 $b_n=\frac{n(n-1)}{2}$.

又因为 $b_n=\log_2a_n$,

所以 $\frac{n(n-1)}{2}=\log_2a_n$.

所以 $a_n=2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

点评 注意利用取对数的方法要满足 $a_n>0$ 这一条件.另外本题还可以利用累乘法求解.

6 形如 $a_n=f(n)a_{n-1}+g(n)(n\in\mathbf{N}^*, n\geqslant2)$ 的数列

6.1 利用累加法

当 $f(n)=1$ 时,形如 $a_n=a_{n-1}+g(n)(n\geqslant2)$, $n\in\mathbf{N}^*$ 的形式,可利用累加法求数列的通项公式[2].

例6 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$,且 $a_{n+1}-a_n=2n+1$, $n\in\mathbf{N}^*$,求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解析 因为 $a_{n+1}-a_n=2n+1$,所以

$a_2-a_1=2\times1+1$,

$a_3-a_2=2\times2+1$,

$a_4-a_3=2\times3+1$,

…………

$a_n-a_{n-1}=2\times(n-1)+1$.

以上各式两边分别相加

$a_n-a_1=2(1+2+3+4+\cdots+n-1)+1\times(n-1)$.

所以 $a_n=n^2$.

6.2 利用累乘法或者等式两边同时取对数的方法

当 $g(n)=0$ 时,形如 $a_n=f(n)a_{n-1}(n\geqslant2)$ 的形式利用累乘法或者等式两边同时取对数的方法求数列的通项公式(见例 10).

7 形如 $a_{n+1}=\dfrac{Aa_n}{Ba_n+A}(n\in\mathbf{N}^*,A,B$ 为常数)的数列

例 7　已知数列$\{a_n\}$的首项 $a_1=1$,且各项满足公式 $a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+2}(n\in\mathbf{N}^*)$,求数列$\{a_n\}$的通项公式.

解析　因为数列$\{a_n\}$的首项 $a_1=1$,且各项满足公式 $a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+2}(n\in\mathbf{N}^*)$,则 $a_2\neq0,a_3\neq0,\cdots$,以此类推,对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$,$a_n\neq0$,由 $a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+2}$ 两边同时取倒数可得$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{2+a_n}{2a_n}=\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{2}$.

所以$\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{2}$.

所以数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$是以$\dfrac{1}{a_1}=1$ 为首项,$\dfrac{1}{2}$为公差的等差数列,

所以$\dfrac{1}{a_n}=1+\dfrac{n-1}{2}=\dfrac{n+1}{2}$.

所以 $a_n=\dfrac{2}{n+1}$.

点评　形如 $a_{n+1}=\dfrac{Aa_n}{Ba_n+A}(n\in\mathbf{N}^*,A,B$ 为常数)的数列等式,可以两边同时取倒数,转化为等差数列或等比数列.

8 与正整数有关的和的等式求通项公式用分离法

例 8　已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,且 $S_1+2S_2+3S_3+\cdots+nS_n=n^3,n\in\mathbf{N}^*$,求数列$\{a_n\}$的通项公式.

解析　由已知,$n\geqslant2$ 时,

$S_1+2S_2+3S_3+\cdots+(n-1)S_{n-1}+nS_n=n^3$, ①

$S_1+2S_2+3S_3+\cdots+(n-1)S_{n-1}=(n-1)^3$, ②

由①-②,得

$nS_n=n^3-(n-1)^3$.

所以 $S_n=3n+\dfrac{1}{n}-3(n\geqslant2)$.

又当 $n=1$ 时,$S_1=1$ 也符合上式,

所以 $S_n=3n+\dfrac{1}{n}-3(n\in\mathbf{N}^*)$.

当 $n=1$ 时,$a_1=1$,

当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=(3n+\dfrac{1}{n}-3)-3(n-1)-\dfrac{1}{n-1}+3=3+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n-1}=3-\dfrac{1}{n(n-1)}$.

所以 $a_n=\begin{cases}1,n=1,\\ 3-\dfrac{1}{n(n-1)},n\geqslant2.\end{cases}$

9 关于数列的奇数项和偶数项的通项公式

例 9　已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1,a_2=2,a_{n+2}-a_n=(-1)^n+2,n\in\mathbf{N}^*$,求数列$\{a_n\}$的通项公式.

解析　由已知条件 $a_{n+2}-a_n=(-1)^n+2$ 可知:当 n 为奇数时,$a_{n+2}-a_n=1$,$\{a_{2n-1}\}$是以 1 为首项,1 为公差的等差数列;

当 n 为偶数时,$a_{n+2}-a_n=3$,$\{a_{2n}\}$是以 2 为首项,3 为公差的等差数列.

所以当 $n=2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$时,

$a_{2k-1}=a_1+(k-1)d=1+(k-1)\times1=k$.

由 $n=2k-1$ 可知 $k=\frac{n+1}{2}(k\in\mathbf{N}^*)$.

所以 $a_n=\frac{n+1}{2}$.

当 $n=2k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，

$a_{2k}=a_2+(k-1)d=2+(k-1)3=3k-1$.

由 $n=2k$ 可知 $k=\frac{n}{2}(k\in\mathbf{N}^*)$.

所以 $a_n=\frac{3}{2}n-1$.

所以所求数列的通项公式是

$$a_n=\begin{cases}\frac{n+1}{2}, n=2k-1, k\in\mathbf{N}^*,\\ \frac{3}{2}n-1, n=2k, k\in\mathbf{N}^*.\end{cases}$$

点评 根据递推公式得出奇数项数列和偶数项数列各为等差数列，再结合已知数列的通项公式来求解问题，这里要注意奇数项和偶数项的首项. 注意等式或不等式中出现 $(-1)^n$，一般都要分 n 为奇数和偶数进行讨论.

10 形如 $a_1=A\frac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$ 或 $a_1=Aa_{n+1}-a_n=f(n)$（A 为常数，$n\in\mathbf{N}^*$）的数列求通项公式用累乘法或累加法

例10 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_1=1$，$\{S_n+na_n\}$ 为常数列，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

分析 由已知可得出 $S_n+na_n=2$，进而可知 $S_{n-1}+(n-1)a_{n-1}=2(n\geqslant 2)$，两式两边分别相减得 $(n+1)a_n=(n-1)a_{n-1}$，然后利用累乘法求出 a_n 即可.

解析 因为 $\{S_n+na_n\}$ 为常数列且 $a_1=1$，

所以 $S_n+na_n=S_1+1\times a_1=2$，

(1) 当 $n=1$ 时，因为 $S_1+1\cdot a_1=2$，所以 $a_1=1$.

(2) 当 $n\geqslant 2$ 时，由已知 $S_n+na_n=2$， ③

所以 $S_{n-1}+(n-1)a_{n-1}=2$， ④

③－④，得 $(n+1)a_n=(n-1)a_{n-1}$.

即 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n-1}{n+1}$.

所以 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3}$，

$\frac{a_3}{a_2}=\frac{3-1}{3+1}=\frac{2}{4}$，

$\frac{a_4}{a_3}=\frac{4-1}{4+1}=\frac{3}{5}$，

$\frac{a_5}{a_4}=\frac{5-1}{5+1}=\frac{4}{6}$，

…………

$\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=\frac{n-1-1}{n-1+1}=\frac{n-2}{n}$，

$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n-1}{n+1}$.

以上等式两边分别相乘，得

$$\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_4}{a_3}\cdot\frac{a_5}{a_4}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{6}\cdots\times\frac{n-2}{n}\times\frac{n-1}{n+1},$$

得 $a_n=\frac{2}{n(n+1)}(n\geqslant 2)$.

又当 $n=1$ 时，$a_1=\frac{2}{1\times(1+1)}=1$ 满足 $a_n=\frac{2}{n(n+1)}$. 所以 $a_n=\frac{2}{n(n+1)}$.

点评 本题考查利用 a_n 与 S_n 的关系求数列的通项，考查累乘法求通项，合理递推作差是解答的关键. 本题注意要写出前四个等式和最后两个等式，可以方便观察，本题着重考查推理与运算能力.

参考文献：

[1] 朱磊. 利用待定系数法巧求数列的通巧公式[J]. 数理化解题研究，2022(34)：28－30.

[2] 江中伟. 例谈累加法求数列通项公式的求解策略[J]. 数理化解题研究，2022(31)：15－17.

[责任编辑：李　璟]