基于关键能力考查的“直线与圆锥曲线”复习课设计示例*

付玉美（河北省邢台市第五中学）

文章编号：1002-2171(2023)3-0044-03

1 教学分析

1.1 内容分析

在高考第一轮复习中，运用坐标法判断直线与圆锥曲线的位置关系，解决与直线与圆锥曲线的位置关系相关的弦长、面积、最值、定点、定值等综合性问题是复习的重点和难点。高考第二轮复习旨在第一轮复习的基础上提升学生灵活运用几何与代数的方法思考、找到恰当的策略解决问题的能力；这类问题能够综合考查学生的直观想象、数学运算、逻辑推理等素养，深受高考命题者的青睐。

1.2 学情分析

通过高考第一轮复习，学生基本能够运用坐标法判断直线与圆锥曲线的位置关系并解决相关综合问题。然而，在解决具体问题时，学生常常被烦琐的运算桎梏。究其根本原因，在于解题方法的选择、思维方式的作用。因此，高考第二轮复习的核心任务为帮助学生构建知识网络、完善方法体系，从而打破思维的壁垒、优化解题路径。

1.3 教学目标

(1)熟悉运用坐标法解决直线与圆锥曲线问题的基本思路。

(2)能够根据题设条件进行恰当转化；能用代数语言刻画常见的几何特征，体会不同刻画方式之间的优劣，养成良好的思维习惯；能分析预判选取不同方案对问题解决的可行性、合理性的影响，优化解题策略。

(3)通过对一道典型例题的探究，聚焦“条件—问题”的转化与化归，寻求多路径思考，择优而求。

2 教学设计

例1 已知点 $A(2,1)$ 在双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2-1}=1$ $(a>1)$ 上，直线 l 交 C 于 P,Q 两点，直线 AP,AQ 的斜率之和为0，求 l 的斜率。

设计意图：通过探究 l 斜率的不同求法，合理选取变量（方程）刻画运动，寻找不同解决方案，强化解决直线与圆锥曲线问题的一般套路，在此过程中培养学生良好的思维习惯，提升其数学核心素养。

问题1：通过审题，你能得到哪些信息？请将信息转化为数学表达式并写出来。

2.1 思路1：尝试设线

设出直线的方程，通过联立直线方程与双曲线方程得到点的坐标的关系。

问题2：设哪条直线的方程？方程的形式是怎样的？

角度1：设直线 l 的方程为 $y=kx+m(k\neq0)$。

角度2：设直线 AP,AQ 的方程分别为 $y-1=k(x-2)$，$y-1=-k(x-2)(k\neq0)$。

角度3：设直线 l 的方程为 $m(x-2)+n(y-1)=1(m,n\neq0)$。

角度4：分别设出直线 AP,AQ 的参数方程。

角度5：平移直角坐标系，以 $A(2,1)$ 为原点建系，设直线 l 的方程为 $mx+ny=1(m,n\neq0)$。

问题3：从运算角度看，哪一种设方程的角度更简单？请说明理由。

*本文系河北省教育科学研究“十三·五”规划课题2019年度一般资助课题“核心素养背景下薄弱高中提升学生数学运算能力的行动研究”（课题批准号：1903076）阶段性研究成果。

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

解法1:易知直线 l 的斜率存在,设直线 l 的方程为 $y=kx+m$,$P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,联立 $\begin{cases}y=kx+m,\\ \dfrac{x^2}{2}-y^2=1\end{cases}$ 可得 $(1-2k^2)x^2-4mkx-2m^2-2=0$。

所以 $x_1+x_2=-\dfrac{4mk}{2k^2-1}$,$x_1x_2=\dfrac{2m^2+2}{2k^2-1}$, ①

$\Delta=16m^2k^2-4(2m^2+2)(2k^2-1)>0\Rightarrow m^2+1-2k^2>0$。

由 $k_{AP}+k_{BP}=0$ 可得 $\dfrac{y_1-1}{x_1-2}+\dfrac{y_2-1}{x_2-2}=0$,代入①,整理得 $2k^2+(m+1)k+m-1=0$,即 $(k+1)(2k-1+m)=0$。

因为直线 l 不经过点 $A(2,1)$,所以 $k=-1$。

问题4:解法1中运算的难点是什么?

设计意图:引导学生回顾运算过程,查找个人的运算失误点,关注方程 $2k^2+(m+1)k+m-1=0$ 的因式分解。

解法2:设直线 AP 的方程为 $y-1=k(x-2)$,因为直线 AP,AQ 的斜率之和为0,所以直线 AQ 的方程为 $y-1=-k(x-2)$。

联立 $\begin{cases}y-1=k(x-2),\\ \dfrac{x^2}{2}-y^2=1\end{cases}$ 可得 $(2k^2-1)x^2-4k(2k-1)x+2(2k-1)^2+2=0$。

根据根与系数的关系,$2x_P=\dfrac{2(2k-1)^2+2}{2k^2-1}$,则 $x_P=\dfrac{4k^2-4k+2}{2k^2-1}$,代入直线 AP 的方程可得 $P\left(\dfrac{4k^2-4k+2}{2k^2-1},\dfrac{-2k^2+4k-1}{2k^2-1}\right)$,同理可得 $Q\left(\dfrac{4k^2+4k+2}{2k^2-1},\dfrac{-2k^2-4k-1}{2k^2-1}\right)$。

$$故\ k_{PQ}=\frac{\dfrac{-2k^2+4k-1}{2k^2-1}-\dfrac{-2k^2-4k-1}{2k^2-1}}{\dfrac{4k^2-4k+2}{2k^2-1}-\dfrac{4k^2+4k+2}{2k^2-1}}=-1。$$

问题5:解法2与解法1相比,孰优孰劣?在解法2求解的过程中,运算的关键步骤是什么?

解法3:易知直线 l 的斜率存在且不经过点 A,于是可设直线 l 的方程为 $m(x-2)+n(y-1)=1(m,n\neq0)$。

双曲线可化为 $\dfrac{[(x-2)+2]^2}{2}-[(y-1)+1]^2=1$,即 $(x-2)^2-2(y-1)^2+4[(x-2)-(y-1)]=0$。

凑齐次式 $(x-2)^2-2y^2+4[(x-2)-(y-1)]\cdot[m(x-2)+n(y-1)]=0$,

整理得 $(4n+2)\left(\dfrac{y-1}{x-2}\right)^2+4(m-n)\cdot\dfrac{y-1}{x-2}-(4m+1)=0$,则 $k_{AP}=\dfrac{y_1-1}{x_1-2}$,$k_{AQ}=\dfrac{y_2-1}{x_2-2}$,且 $k_{AP}+k_{AQ}=-\dfrac{4(m-n)}{4n+2}=0$,得 $m=n$,故 $k_{PQ}=-\dfrac{m}{n}=-1$。

问题6:解法3思维的出发点是什么?它相比较解法1、解法2有哪些特点?

设计意图:引导学生及时总结知识和方法,高屋建瓴,俯瞰回眸。从知识上讲,齐次化是处理解析几何中的斜率和与积问题的常规求解方法;从运算来说,整体代换是简化运算的一种策略。

解法4:设直线 AP 的倾斜角为 θ,其参数方程为 $\begin{cases}x=2+t\cos\theta,\\ y=1+t\sin\theta。\end{cases}$

由题意得直线 AQ 的倾斜角为 $\pi-\theta$,其参数方程为 $\begin{cases}x=2+t\cos(\pi-\theta),\\ y=1+t\sin(\pi-\theta),\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=2-t\cos\theta,\\ y=1+t\sin\theta。\end{cases}$

将点 $P(2+t_1\cos\theta,1+t_1\sin\theta)$,点 $Q(2-t_2\cos\theta,1+t_2\sin\theta)$ 代入双曲线方程得

$$t_1=\frac{-4\cos\theta+4\sin\theta}{\cos^2\theta-2\sin^2\theta},t_2=\frac{4\cos\theta+4\sin\theta}{\cos^2\theta-2\sin^2\theta}。$$

则直线 PQ 的斜率 $k_{PQ}=\dfrac{(t_2-t_1)\sin\theta}{-(t_2+t_1)\cos\theta}=-1$。

问题7:解法4中倾斜角 θ,t 发挥了怎样的作用?

设计意图:引导学生思考引入中间量,即运用参数解题。尽管直线的参数方程在新课标中不做要求,但是根据学情适当拓展有助于拓宽学生的解题思路。

2.2 思路2:尝试设点

设出点 P,Q 的坐标,利用已知条件得出所求直线 l 的斜率表达式。

解法5:设 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$ 则 $k_{AP}=\dfrac{y_1-1}{x_1-2}$,$k_{AQ}=\dfrac{y_2-1}{x_2-2}$,代入 $k_{AP}+k_{AQ}=0$,整理得

$x_1y_2+x_2y_1-x_1-x_2-2y_1-2y_2+4=0$。 ②

将点 P,Q,A 分别代入双曲线方程得

$\dfrac{x_1^2}{2}-y_1^2=1$; ③

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$\frac{x_2^2}{2}-y_2^2=1$； ④

$\frac{2^2}{2}-1^2=1$。 ⑤

③－④，整理得$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{x_1+x_2}{2(y_1+y_2)}$，即

$k_{PQ}=\frac{x_1+x_2}{2(y_1+y_2)}$。

同理③－⑤，④－⑤，可得 $k_{AP}=\frac{x_1+2}{2(y_1+1)}$，$k_{AQ}=\frac{x_2+2}{2(y_2+1)}$，代入 $k_{AP}+k_{AQ}=0$。

整理得 $x_1y_2+x_2y_1+x_1+x_2+2y_1+2y_2+4=0$。⑥

由②－⑥得 $2(x_1+x_2)+4(y_1+y_2)=0$，所以 $x_1+x_2=-2(y_1+y_2)$，故 $k_{PQ}=\frac{x_1+x_2}{2(y_1+y_2)}=-1$。

问题8：点差法一般用于解决什么问题？在解法5中是如何运用的？

2.3 思路3：尝试设曲线系

问题9：你还记得交点直线系方程和圆系方程吗？对解决本题有什么启发？

设计意图：类比直线系和圆系方程，引导学生从曲线系的角度思考本题。

解法6：直线 AP 的方程为 $y-1=k(x-2)$。 ⑦

因为直线 AP，AQ 的斜率之和为0，所以直线 AQ 的方程为 $y-1=-k(x-2)$， ⑧

⑦×⑧得$[y-1-k(x-2)][y-1+k(x-2)]=0$，⑨

⑨式与双曲线$\frac{x^2}{2}-y^2=1$构成的二次曲线系为

$\lambda(x^2-2y^2-2)-[y-1-k(x-2)][y-1+k(x-2)]=0$，即$(\lambda+k^2)x^2-(2\lambda+1)y^2-4k^2x+2y+4k^2-2\lambda-1=0$， ⑩

由 $\lambda+k^2=2\lambda+1$，得 $\lambda=k^2-1$。

于是⑩式可化为$(x-y-1)[(2k^2-1)(x+y)-2k^2-1]=0$。

易知 $x-y-1=0$ 为双曲线在点$(2,1)$处的切线，故直线 PQ 的方程为$(2k^2-1)(x+y)-2k^2-1=0$，则 $k_{PQ}=-1$。

3 教学反思

高考第二轮复习是在夯实基础上拓展能力。为了实现这一目标，高考第二轮复习宜以点带面、点面结合，以典型例题为依托，明晰审题步骤，注重转化与化归，突出策略比较，充分展现学生的思维碰撞、认知冲突、领悟提升等过程。本文选用的例题是2022年高考数学新高考卷Ⅰ第21题第(Ⅰ)问，其思维方式、解题思路的多样性为解题者提供了广阔的思维空间，有利于考查主干知识，达到甄别学生能力差异的目的，值得反复品味。在实际教学中，通过例题的教学能够帮助学生提炼基本知识、基本方法、基本能力与思想方法，引导学生重视知识的储备和方法的积累。

4 反馈训练

(1)(2009年高考数学辽宁卷理科第20题)已知椭圆 C 过点 $A\left(1,\frac{3}{2}\right)$，两个焦点坐标为$(-1,0)$，$(1,0)$。

(Ⅰ)求椭圆的方程；

(Ⅱ)E，F 是椭圆 C 上的两个动点，如果直线 AE 与 AF 的斜率互为相反数，证明直线 EF 的斜率为定值，求出这个定值。

(2)(2018年高考数学全国卷Ⅰ第19题)设椭圆 C：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的右焦点为 F，过 F 的直线 l 与 C 交于 A，B 两点，点 M 的坐标为$(2,0)$。设 O 为坐标原点，证明：$\angle OMA=\angle OMB$。

(3)(2022年高考数学新高考卷Ⅰ第11题)(多选题)已知 O 为坐标原点，点 $A(1,1)$在抛物线 C：$x^2=2py(p>0)$上，过点 $B(0,-1)$的直线交 C 于 P，Q 两点，则(　　)。

A. C 的准线为 $y=-1$

B. 直线 AB 与 C 相切

C. $|OP|\cdot|OQ|>|OA|^2$

D. $|BP|\cdot|BQ|>|BA|^2$

(4)(2022年高考数学新高考卷Ⅰ第16题)已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$C$ 的上顶点为 A，两个焦点为 F_1，F_2，离心率为$\frac{1}{2}$。过 F_1 且垂直于 AF_2 的直线与 C 交于 D，E 两点，$|DE|=6$，则$\triangle ADE$ 的周长是________。

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net