$\left(x-\frac{-t-\sqrt{3-3t^2}}{2}\right)$，于是，$f(x)$所有可能零点为 t，$\frac{-t-\sqrt{3-3t^2}}{2}$，$\frac{-t+\sqrt{3-3t^2}}{2}$. 当 $|t|=1$ 时，$f(x)$的零点为 t 和 $-\frac{t}{2}$. 因 $|t|\leqslant 1$，所以要证命题成立，只需证$\begin{cases}\frac{-t-\sqrt{3-3t^2}}{2}\geqslant -1,\\ \frac{-t+\sqrt{3-3t^2}}{2}\leqslant 1,\end{cases}$ 即证 $\sqrt{3-3t^2}\leqslant 2\pm t$，只需证 $3-3t^2\leqslant(2\pm t)^2$，即证 $(2t\pm 1)^2\geqslant 0$，而此式显然成立，因此原命题成立.

评注：解法 3 是由福建省仙游金石中学的林琳[6]提供，从多项式因式分解角度入手，不采用导数方法证明，打破高考函数压轴题的常规解题思路，把命题转化为等价不等式组，利用分析法证明，执果索因. 解法技巧性强，妙不可言，体现解题者扎实的数学基本能力与数学运算功底，紧扣《课程标准(2017 年版)》[1]与《高考评价体系》[4]思想和理念，注重考生关键能力和学科必备知识的培养，对于数学学习和数学教学具有很好的引导作用，有利于提高考生数学学习的兴趣，挖掘考生数学继续学习的潜能，促进考生数学学科综合素养的提升.

4 解法启示

波利亚(Polya)认为，中学数学教育的根本目的是“教会学生思考”. “教会学生思考”意味着数学教师不只是传授知识，还应努力发展学生运用所学知识的能力，应该强调技能、技巧、有益的思考方式和理想的思维习惯. 教师在教学时，要遵循学习过程的三个原则：主动学习，最佳动机，循序渐进[7]. 本试题解法多样，试题已知条件的设计符合考生的学习实际，给考生提供了多种分析问题和解决问题的思路，引导考生通过有效的数学阅读，利用直观思维抓住问题的本质，在剖析问题本质的基础上，追求简洁的解题方法，力求解法来源于教材和已学知识，又高于已有知识，体现试题的区分与选拔功能. 在日常的教学实践中，教师应加强逻辑推理能力和数形结合思想的训练，设置有效的“精致练习”[8]，培养学生独立思考的习惯，注重学科能力和素养的提升，促进教、学、考的有机统一，助力学生的全面发展[4]，让学生在“润物细无声”中学会应用数学思想与方法解决实际问题[9].

参考文献

[1]中华人民共和国教育部制定. 普通高中数学课程标准(2017 年版)[S]. 北京：人民教育出版社，2018. 1:6,16.
[2]江智如. 例谈图象法求解函数零点问题的方法探析[J]. 中学数学研究(江西师大)，2019(7):37－39.
[3]江智如. 从一道选择题浅谈反证法的应用[J]. 福建中学数学，2013(7,8):81－83.
[4]教育部考试中心. 中国高考评价体系说明[M]. 北京：人民教育出版社，2019(11):36,22.
[5]教育部考试中心. 高考试题分析. 理科数学分册：2020 年版[M]. 北京：人民教育出版社，2020. 1:46.
[6]林琳. 不用导数证全国 III 卷第 21(2)压轴题[Z/OL]. 量级研究与数学学习(公众号)，2020(7).
[7]张奠宙，宋乃庆. 数学教育概论(第二版)[M]. 北京：高等教育出版社，2009. 1:47.
[8]江智如. 高中平面向量教学中的“精致练习”[J]. 福建中学数学，2016(1):16－19.
[9]江智如. 利用图象法刍议函数整数解问题的解题策略[J]. 中学数学研究(华南师大)，2019(4):10－13.

破解数列问题中不定方程整数解的常用策略

江苏省昆山市教师发展中心　(215300)　戈　峰
江苏省昆山市柏庐高级中学　(215300)　何晓勤

在数列综合问题中，经常会遇到不定方程的整数解问题，此类问题往往会涉及函数、方程、不等式、数列的性质及数论等知识，精彩纷呈，解法灵活多样. 因此，探讨求解此类问题的常用策略很有必要. 所谓不定方程的整数解问题是指方程的个数小于未知数的个数，且未知数的解为整数的问题. 笔者下面通过举例，谈谈求解数列存在性问题中不定方程整数解的常用策略，供大家参考.

1. 整除分析法

利用数列项数为正整数这一特性，可将不定方

程中的某个变元用其他变元代数表示,并分离常数(整数),再利用整除的性质分析方程的整数解.

例1　设数列$\{a_n\}$是公差为2的等差数列,数列$\{b_n\}$满足$b_1=1,b_2=2,a_nb_n+b_n=(n+1)b_{n+1}$.

(1)求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式;

(2)设$c_n=\frac{a_n}{\log_2 b_{n+1}}$,试问是否存在正整数$s,t(s\neq t)$,使$c_3,c_s,c_t$成等差数列?若存在,求出$s,t$的值;若不存在,请说明理由.

解析:(1)在$a_nb_n+b_n=(n+1)b_{n+1}$中,令$n=1$,得$a_1=3$,所以$a_n=3+2(n-1)=2n+1$.将$a_n=2n+1$代入$a_nb_n+b_n=(n+1)b_{n+1}$,得$b_{n+1}=2b_n$,所以数列$\{b_n\}$是以1为首项,2为公比的等比数列,即$b_n=2^{n-1}$.

(2)因为$a_n=2n+1,b_n=2^{n-1}$,所以$c_n=\frac{2n+1}{n}=2+\frac{1}{n}$.假设存在正整数$s,t(s\neq t)$,使$c_3,c_s,c_t$成等差数列,则$2c_s=c_3+c_t$,即$\frac{2}{s}=\frac{1}{3}+\frac{1}{t}$,化得$s=6-\frac{18}{t+3}$,因为$s,t$为正整数,所以$t+3$是18的大于3的约数,所以$t+3=6$或$t+3=9$或$t+3=18$,解得$\begin{cases}s=3,\\t=3,\end{cases}$(舍去),或$\begin{cases}s=6,\\t=4\end{cases}$或$\begin{cases}s=15,\\t=5.\end{cases}$故存在$t=6,s=4$或者$t=15,s=5$,使得$c_3,c_s,c_t$成等差数列.

总结:数列中的存在性问题求解策略,一般采用逆向思维,先假设存在,然后结合已知条件进行逻辑推理.本题中涉及的不定方程为$\frac{2}{s}=\frac{1}{3}+\frac{1}{t}$即$s=6-\frac{18}{t+3}$,通过将"$s$为正整数"转化为"$\frac{18}{t+3}$为正整数",进而得到18被$t+3$整除,再估计出$t+3$的所有可能取值.一般地,当二元不定方程的一个变量容易分离时,可分离变量后利用整除性解决.

2.奇偶分析法

对于某些不定方程,可从不定方程等式两边的符号和奇偶性角度分析,寻求矛盾来否定存在性,或构造等量关系来肯定存在性.

例2　已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,满足$S_n=2a_n-1(n\in\mathbf{N}^*)$,数列$\{b_n\}$满足$nb_{n+1}-(n+1)b_n=n(n+1)(n\in\mathbf{N}^*)$,且$b_1=1$.

(1)求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式;

(2)是否存在正整数m,n,使$b_1,a_m,b_n(n>1)$成等差数列?若存在,求出所有满足条件的m,n;若不存在,请说明理由.

解析:(1)当$n=1$时,$S_1=2a_1-1=a_1$,所以$a_1=1$.因为$S_n=2a_n-1(n\in\mathbf{N}^*)$,所以$S_{n-1}=2a_{n-1}-1(n\geqslant 2)$,两式相减得$a_n=2a_{n-1}$,从而数列$\{a_n\}$为首项$a_1=1$、公比$q=2$的等比数列,从而数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2^{n-1}$.由$nb_{n+1}-(n+1)b_n=n(n+1)$两边同除以$n(n+1)$,得$\frac{b_{n+1}}{n+1}-\frac{b_n}{n}=1$,从而数列$\left\{\frac{b_n}{n}\right\}$为首项$b_1=1$、公差$d=1$的等差数列,所以$\frac{b_n}{n}=n$,从而数列$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=n^2$.

(2)假设存在正整数$m,n(n>1)$,使b_1,a_m,b_n成等差数列,则$b_1+b_n=2a_m$,即$1+n^2=2^m$.若n为偶数,则$1+n^2$为奇数,而2^m为偶数,上式不成立.若n为奇数,设$n=2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$,则$1+n^2=1+(2k-1)^2=4k^2-4k+2=2^m$,于是$2k^2-2k+1=2^{m-1}$,即$2(k^2-k)+1=2^{m-1}$.当$m=1$时,$k=1$,此时$n=2k-1=1$与$n>1$矛盾;当$m\geqslant 2$时,上式左边为奇数,右边为偶数,显然不成立.

综上所述,满足条件的正整数m,n不存在.

总结:本题破解的关键是运用奇偶分析法研究方程$1+n^2=2^m$的正整数解的情况.在正整数中,奇数与偶数不等是基本矛盾之一,通常可以用来说明不定方程的整数解不存在.

3.因式分解法

若不定方程可化为一边是两个(或多个)因式的乘积,另一边是一个整数的形式,则可因式分解后分析不定方程的整数解的情况.

例3　已知各项均为正数的数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,且满足:$a_1=1,4S_n=(a_n+1)^2(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)是否存在大于2的正整数m、k,使得$a_m+a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{m+k}=300$?若存在,求出所有符合条件的$m$、$k$;若不存在,请说明理由.

解析:(1)由$4S_n=(a_n+1)^2$得$4S_{n+1}=(a_{n+1}+1)^2$,两式相减并化简得$(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n-2)=0$,由于$a_n>0$,所以$a_{n+1}-a_n-2$,所以数列$\{a_n\}$是首项为1,公差为1的等差数列,所以$a_n=2n-1$.

(2)存在大于2的正整数m、k,使得$a_m+a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{m+k}=300$.

理由如下:假设存在大于2的正整数m、k,使得$a_m+a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{m+k}=300$,由(1)得$a_m+a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{m+k}=(2m+k-1)(k+1)=300$.由于正整数$m,k$均大于2,故$2m+k-1>k+1\geqslant 4$,且$2m+k-1$

和 $k+1$ 的奇偶性相同. 由 $300=2^2\times3\times5^2$ 得 $\begin{cases}k+1=2\times3,\\2m+k-1=2\times5^2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}k+1=2\times5,\\2m+k-1=2\times3\times5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=5,\\m=23\end{cases}$ 或 $\begin{cases}k=9,\\m=11.\end{cases}$ 因此,存在大于2的正整数 m、k,使得 $a_m+a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{m+k}=300$.

总结:本题求解的关键在于因式分解得到 $a_m+a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{m+k}=(2m+k-1)(k+1)$ 及 $300=2^2\times3\times5^2$,再结合奇偶性和整除性处理. 处理此类问题时,往往需要对分解所得的因式的大小、奇偶、正负等进行讨论,以减小运算量.

4　不等关系转化法

若不定方程中涉及的多个变量有范围或大小关系时,可通过不等关系的转化将其中一个变量的范围缩小,从而求出这个变量的整数解,再进一步求出其他变量的整数解.

例4　已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, $a_2+a_5=12$, $S_4=16$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\dfrac{1}{4S_n-1}$, T_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和,是否存在正整数 $m,k(1<m<k)$,使得 $T_k=3T_m^2$? 若存在,求出 m,k 的值;若不存在,请说明理由.

解析:(1)设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d,由 $\begin{cases}a_2+a_5=12,\\S_4=16\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2a_1+5d=12,\\2a_1+3d=8,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=1,\\d=2,\end{cases}$ 所以 $a_n=1+2(n-1)=2n-1,n\in\mathbf{N}^*$.

(2)因为 $S_n=n+\dfrac{n(n-1)}{2}\times2=n^2$,所以 $b_n=\dfrac{1}{4n^2-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$,则 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\dfrac{1}{2}\left[\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2n-3}-\dfrac{1}{2n-1}\right)+\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)\right]=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{n}{2n+1}$,若 $T_k=3T_m^2$,则 $\dfrac{k}{2k+1}=\dfrac{3m^2}{(2m+1)^2}$,整理得 $k=\dfrac{3m^2}{4m+1-2m^2}$,又 $k>m>1$,所以

$\begin{cases}\dfrac{3m^2}{4m+1-2m^2}>m,\\m>1,\end{cases}$ 整理得 $\begin{cases}\dfrac{2m^2-m-1}{4m+1-2m^2}>0,\\m>1,\end{cases}$ 解得 $1<m<1+\dfrac{\sqrt{6}}{2}$,又 $m\in\mathbf{N}^*$,所以 $m=2$,所以 $k=12$.

故存在 $m=2,k=12$ 满足题意.

总结:在多变量中,往往需要紧扣多个变量之间的大小关系(比如本题中的 $k>m$)以及变量自身内含的范围(比如本题中的 m 是大于1的正整数),其中一个变量对另一个变量的取值范围起着决定性作用. 当不定方程的整数解较难确定时,可利用不等式前后夹逼的方法得到整数解.

5. 单调性分析法

数列是特殊的函数,可利用其单调性来研究不定方程的正整数解问题. 求解时,常将不定方程两边都看作一个以某变量为主的数列(或函数),再分别研究这两个数列(或函数)的单调性.

例5　已知数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 A_n 和 B_n,且对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, $a_{n+1}-a_n=2(b_{n+1}-b_n)$ 恒成立.

(1)若 $A_n=n^2$, $b_1=2$,求 B_n;

(2)若 $a_1=2$, $b_n=2^n$,是否存在两个互不相等的整数 $s,t(1<s<t)$,使 $\dfrac{A_1}{B_1},\dfrac{A_s}{B_s},\dfrac{A_t}{B_t}$ 成等差数列? 若存在,求出 s,t 的值;若不存在,请说明理由.

解析:(1)因为 $A_n=n^2$,所以当 $n=1$ 时, $a_1=1$,当 $n\geqslant2$ 时, $a_n=n^2-(n-1)^2=2n-1$,又 a_1 符合 a_n,所以 $a_n=2n-1$,故 $b_{n+1}-b_n=\dfrac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)=1$,所以数列 $\{b_n\}$ 是以2为首项,1为公差的等差数列,所以 $B_n=n\cdot2+\dfrac{1}{2}\cdot n\cdot(n-1)\cdot1=\dfrac{1}{2}n^2+\dfrac{3}{2}n$.

(2)由 $a_{n+1}-a_n=2(b_{n+1}-b_n)$ 得 $a_{n+1}-a_n=2^{n+1}$,所以,当 $n\geqslant2$ 时, $a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_3-a_2)+(a_2-a_1)+a_1=2^n+2^{n-1}+\cdots+2^3+2^2+2=2^{n+1}-2$,当 $n=1$ 时,上式也成立,所以 $A_n=2^{n+2}-4-2n$,又 $B_n=2^{n+1}-2$,所以 $\dfrac{A_n}{B_n}=\dfrac{2^{n+2}-4-2n}{2^{n+1}-2}=2-\dfrac{n}{2^n-1}$. 假设存在两个互不相等的整数 $s,t(1<s<t)$,使 $\dfrac{A_1}{B_1},\dfrac{A_s}{B_s},\dfrac{A_t}{B_t}$ 成等差数列,等价于 $\dfrac{1}{2^1-1},\dfrac{s}{2^s-1},\dfrac{t}{2^t-1}$ 成等差数列,即 $\dfrac{2s}{2^s-1}=\dfrac{1}{2^1-1}+\dfrac{t}{2^t-1}$,即 $\dfrac{2s}{2^s-1}=1+\dfrac{t}{2^t-1}$,因为 $1+\dfrac{t}{2^t-1}>1$,所以 $\dfrac{2s}{2^s-1}>1$,即 $2^s<2s+1$,令 $h(s)=2^s-2s-1(s\geqslant2,s\in\mathbf{N}^*)$,则 $h(s+1)-h(s)=2^s-2>0$,所以 $h(s)$ 递增,若 $s\geqslant3$,则 $h(s)\geqslant h(3)=1>0$,不满足 $2^s<2s+1$,所以 $s=2$,代入 $\dfrac{2s}{2^s-1}=\dfrac{1}{2^1-1}+\dfrac{t}{2^t-1}$ 得 2^t-3t

$-1=0(t\geqslant 3)$，当 $t=3$ 时，显然不符合要求；当 $t\geqslant 4$ 时，令 $\varphi(t)=2^t-3t-1(t\geqslant 3,t\in\mathbf{N}^*)$，则同理可证 $\varphi(t)$ 递增，所以 $\varphi(t)\geqslant\varphi(4)=3>0$，所以不符合要求. 所以，不存在正整数 $s,t(1<s<t)$，使 $\frac{A_1}{B_1},\frac{A_s}{B_s},\frac{A_t}{B_t}$ 成等差数列.

总结：研究数列的单调性主要有作差法（即利用定义）或者构造函数（注意需要将定义域扩充为连续区间），利用函数的性质或导数法处理. 一般地，单调数列可确定数列的范围，进而可确定方程是否有解.

6 基本不等式法

对于某些不定方程，可借助基本不等式导出矛盾，从而说明其正整数解不存在.

例6 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $2S_n=3(a_n-1)(n\in\mathbf{N}^*)$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）记 $c_n=\frac{a_n}{a_n+2}$，是否存在互不相等的正整数 m,s,t，使 m,s,t 成等差数列，且 c_m-1,c_s-1,c_t-1 成等比数列？如果存在，求出所有符合条件的 m,s,t；如果不存在，请说明理由.

解析：（1）因为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $2S_n=3(a_n-1)(n\in\mathbf{N}^*)$，所以当 $n\geqslant 2$ 时，$2S_{n-1}=3(a_{n-1}-1)$，两式相减得 $2a_n=3a_n-3a_{n-1}$，即 $a_n=3a_{n-1}(n\geqslant 2)$，又 $n=1$ 时，$2S_1=3(a_1-1)$，解得 $a_1=3\neq 0$，所以数列 $\{a_n\}$ 是以3为首项，3为公比的等比数列，从而 $a_n=3^n$.

（2）由（1）知 $c_n=\frac{a_n}{a_n+2}=\frac{3^n}{3^n+2}$，假设存在互不相等的正整数 m,s,t 满足条件，则有

$\begin{cases}m+t=2s,\\(c_s-1)^2=(c_m-1)\cdot(c_t-1).\end{cases}$ 由 $c_n=\frac{3^n}{3^n+2}$ 与 $(c_s-1)^2=(c_m-1)\cdot(c_t-1)$ 得 $\left(\frac{3^s}{3^s+2}-1\right)^2=\left(\frac{3^m}{3^m+2}-1\right)\cdot\left(\frac{3^t}{3^t+2}-1\right)$，即 $3^{m+t}+2\times 3^m+2\times 3^t=3^{2s}+4\times 3^s$，因为 $m+t=2s$，所以 $3^m+3^t=2\times 3^s$. 因为 $m\neq t$ 且 $m+t=2s$，所以 $3^m+3^t>2\sqrt{3^{m+t}}=2\times 3^s$，这与 $3^m+3^t=2\times 3^s$ 矛盾. 所以不存在互不相等的正整数 m,s,t 满足条件.

总结：本题突破的关键是通过基本不等式导出 $3^m+3^t>2\sqrt{3^{m+t}}=2\times 3^s(m\neq t$ 且 $m+t=2s)$，从而说明不定方程 $3^m+3^t=2\times 3^s$ 的正整数解不存在. 利用基本不等式解题时，要注意其成立的条件，即“一正，二定，三相等”.

7. 有（无）理数定义法

若不定方程中涉及无理数，应考虑利用无理数和有理数的定义处理.

例7 已知 $a_n=2n+\sqrt{3}$，是否存在正整数 $p,q,r(p<q<r)$，使得 a_p,a_q,a_r 成等比数列？并说明理由.

解析：假设存在正整数 $p,q,r(p<q<r)$，a_p,a_q,a_r 成等比数列，则 $(2q+\sqrt{3})^2=(2p+\sqrt{3})(2r+\sqrt{3})$，即 $2(q^2-pr)+(2q-p-r)\sqrt{3}=0$. 因为 p,q,r 都是正整数，所以 $\begin{cases}q^2-pr=0,\\2q-p-r=0,\end{cases}$ 消去 q 化简可得 $p=r$，这与 $p<q<r$ 矛盾. 所以不存在正整数 $p,q,r(p<q<r)$，使得 a_p,a_q,a_r 成等比数列.

总结：本题突破的关键是分析得出代数式 $2(q^2-pr)+(2q-p-r)\sqrt{3}$ 中涉及无理数 $\sqrt{3}$，且与有理数0相等，再利用有理数的定义列出方程组求解.

以上仅列举了求解数列问题中不定方程整数解的七种常用策略，对于具体问题还需具体分析，灵活处理，做到以不变应万变.

参考文献

[1]丁嘉雯，濮安山. 例析数列中存在性问题的求解策略[J]. 数学通讯，2017(10)(上半月)：4-6.

[2]何振华. 例谈数列中存在性问题的解题套路[J]. 高中数学教与学，2019(4)：24-26.

[3]曹磊. 例谈数列存在探索性问题处理策略[J]. 福建中学数学，2019(6)：40-43.