中学的方法解决特殊二次不定方程

罗嘉隽

(福建省三明市梅列区洋溪中学　365000)

摘　要: 介绍了几种类型二次不定方程整数解的讨论方法,这些方法主要是中学的解法. 用等差数列求和公式,余弦定理与因式分解的方法解决特殊二次不定方程.

关键词: 二次不定方程; 整数解; 解方程

中图分类号: G632　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1008 - 0333(2020)28 - 0043 - 02

不定方程一般来讲,我们只能给出不定方程的求解的思路方法,利用数学方法技巧,目的要将不定方程转化成已解决的结果的方程. 这就要求需要相当熟练的初等和高等的数学知识,才可以在不定方程中研究出有价值的结果. 但是,这不是绝对的,在初等的证明中,具有熟练的初等数论基础知识也会能得到好的成果. 二次不定方程与我们中学数学学习联系,可以用一些中学学习的知识,解决几类二次不定方程.

一、形如 $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=y^2$ 二次不定方程的整数解

二次不定方程有很多特殊的类型,对于特殊类型我们可以方便地研究出一些好的性质,其实在中学我们接触到的不定方程主要是一次不定方程,二次不定方程较少. 中学我们学习了数列,其中数列 $a_n=2n-1(n\in\mathbf{Z}^+)$ 对数列求和,发现可以构造出一类二次不定方程,而且这类不定方程的整数解有一定规律. 发现奇数数列是此类不定方程的整数解.

$$1=1^2$$

$$1+3=2^2$$

$$1+3+5=3^2$$

$$1+3+5+7=4^2$$

$$\cdots\cdots$$

$$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2(n\in\mathbf{Z}^+)$$

证明　$1,3,5,7,\cdots,2n-1,\cdots$ 是等差数列,$a_n=2n-1(n\in\mathbf{Z}^+)$.

运用等差数列求和公式,则 $S_n=\dfrac{n(2n-1+1)}{2}=n^2(n\in\mathbf{Z}^+)$.

发现奇数列求和时右边出现了二次项,如果把奇数列换成未知数,二次项换为未知数,由此启发归纳一种类型的二次不定方程,形如 $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=y^2$. 其中要求 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$,都不为零,因为若其中一个为零那么方程的左边就相当于少一个元变为 $n-1$ 个元形式.

$x=y^2$,

有整数解 $x=1,y=1$;

$x_1+x_2=y^2$,

有整数解 $x_1=1,x_2=3,y=2$;

$x_1+x_2+x_3=y^2$,

有整数解 $x_1=1,x_2=3,x_3=5,y=3$;

……

$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=y^2$,

有整数解 $x_1=1,x_2=3,x_3=5,\cdots,x_n=2n-1(n\in\mathbf{Z}^+),y=n$.

显然零解也满足方程.

此类不定方程的形式为 $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=y^2(n\in\mathbf{Z}^+)$,奇数列是此类不定方程的一个解 $x_1=1,x_2=3,x_3=5,\cdots,x_n=2n-1,y=n$ 是方程的整数解.

例 1　求方程 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=y^2$ ($x_1,x_2,x_3,\cdots,x_6,y$,都不为零) 的整数解.

解　方程左边有 6 项,满足这样形式的整数解可以看做 6 项 $a_n=2n-1$ 的数列求和,则 $x_1=1,x_2=3,x_3$

收稿日期: 2020 - 07 - 05

作者简介: 罗嘉隽(1991. 8 -),福建省三明人,学士,从事数学教学研究.

$=5, x_4=7, x_5=9, x_6=11, y=6$ 是满足方程的整数解.

由于等差数列的求和公式出现了二次项，那么我们将此结果一般化的话，只要是一个等差数列的每一项是整数，那么通过求和公式构造出一类二次不定方程，那么这个整数列的等差数列，是此类不定方程的整数解.

等差数列的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d(n\in\mathbf{Z}^+)$，当 a_1 和 d 是整数，那么这个等差数列是整数列.

等差数列的求和公式 $S_n=\frac{d}{2}n^2+(a_1-\frac{d}{2})n(a_1,d\in\mathbf{Z}^+)$，那么形如 $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=\frac{d}{2}y^2+(a_1-\frac{d}{2})y$ $(a_1,d\in\mathbf{Z}^+)$ 的方程有整数解.

其中整数列 $a_n=a_1+(n-1)d(n\in\mathbf{Z}^+)$，$y=n$ 是不定方程的整数解.

例2　求方程 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=\frac{3}{2}y^2+\frac{1}{2}y$ 的整数解

(其中 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,y，都不为0).

解　原方程等价于 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=\frac{3}{2}y^2+(2-\frac{3}{2})y$.

左边有5项，满足这样形式的整数解，可以看成是 $a_1=2, d=3$.

$a_n=2+(n-1)3$ 的前5项求和，$n=5$，则 $x_1=2, x_2=5, x_3=8, x_4=11, x_5=14, y=5$ 是方程的整数解.

二、余弦定理形式的不定方程

中学还接触到了余弦定理，那么当三角形 ABC 三边为未知数，形如余弦定理形式的二次不定方程整数解，可以把问题转而寻找满足方程整数边的的三角形.

如果三角形 ABC 的三条边分别 a,b,c，当 a,b,c 为整数时，那么形如

$$a^2+b^2-c^2-2ab\cos C=0$$

的方程有整数解 ma, mb, mc.

例3 三角形 ABC 的三边分别为 $a=2, b=4, c=5$，

那么 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{2^2+4^2-5^2}{2\times2\times4}=-\frac{5}{16}$.

则形如 $a^2+b^2-c^2-2a\times b\times(-\frac{5}{16})=0$，$a$、$b$、$c$ 是未知数的二次不定方程整数解问题，$a=2, b=4, c=5$ 是方程的整数解，那么 $a=2m, b=4m, c=5m(m\in\mathbf{Z})$ 也是不定方程的整数解.

当二次不定方程在有几何意义下，如满足余弦定理的形式 $a^2+b^2-c^2-2ab\cos C=0(-1\leqslant\cos C\leqslant1)$.

那么满足这样情况的不定方程，可以结合余弦定理的几何意义来找不定方程的整数解.

三、形如 $ax^2+bxy=c(a,b,c\in\mathbf{Z}^+)$ 二次不定方程的整数解

形如 $ax^2+bxy=c$ 可以观察到方程的左边可以进行因式分解，将方程的左边转化为两因式相乘的形式，简化二次不定方程，具体参见以下例题.

例4　求方程 $x^2-xy=5$ 的整数解.

解　将方程进行因式分解 $x(x-y)=5$，

$x,y\in\mathbf{Z}^+$，x，$x-y$ 是5的约数.

1) $\begin{cases}x=1,\\x-y=5,\end{cases}$ 得到 $\begin{cases}x=1,\\y=-4.\end{cases}$

2) $\begin{cases}x=5,\\x-y=1,\end{cases}$ 得到 $\begin{cases}x=5,\\y=4.\end{cases}$

3) $\begin{cases}x=-1,\\x-y=-5,\end{cases}$ 得到 $\begin{cases}x=-1,\\y=4.\end{cases}$

4) $\begin{cases}x=-5,\\x-y=-1,\end{cases}$ 得到 $\begin{cases}x=-5,\\x-y=-4.\end{cases}$

本文到此，构造一类等差数列求和形式的二次不定方程，联系中学学习的等差数列进行结合，找出此类二次不定方程特殊的整数解，由余弦定理的形式构造了有几何意义的一类二次不定方程.

二次不定方程是研究不定方程的入门，联系中学接触的一些知识，对启发人们对不定方程的兴趣有着一定的作用，对研究高次不定方程有着过度借鉴的作用，与中学的等差数列和余弦定理相联系，能够使中学生引起兴趣. 不定方程研究是数论中的一个难点，但不定方程的形式简单易懂，内容丰富方法多样，研究不定方程，对人们智慧是一个挑战，探索数学深处奥秘的一步. 学习不定方程能够锻炼数学思维与逻辑能力，拓展数学知识面，提高数学分析能力与解决问题能力.

参考文献:

[1] 曹珍富等. 丢番图方程引论[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社,2012.

[2] A. K 苏什凯维奇. 数论初等教程[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社,2011.

[3] 柯召等. 谈谈不定方程[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社,2011.

[责任编辑: 李　璟]