借助几何画板用探索的方式对圆锥曲线的教学方法进行创新

■ 黄发龙

摘要:圆锥曲线在高中解析几何乃至整个高中数学中的重要地位不言而喻,但许多高中学生望而却步,究其原因,一方面是由于其具有对知识结构体系和思维方法的高要求,另一方面,是学生在教学过程中对于抽象的图形、概念和大量的性质、二级结论接受效果不好.而高中教师可以借助几何画板的直观性和便捷性,生动高效地辅助开展教学,帮助学生充分地理解生涩的定义、深刻地认识多样的二级结论、突破综合性问题,全面提升高中圆锥曲线板块的教学效果.

关键词:几何画板;高中教学;圆锥曲线

一直以来,高中解析几何是整个高中数学板块的重中之重,而圆锥曲线因其本身就与数形结合思想深度融合,又能够覆盖和结合高中解析几何的各种重要知识及考点,如直线方程,斜率,向量,正余弦定理等等,因此在高考题中时常出现在压轴题位置,具有相当的分量[1],而现代化几何绘图软件如几何画板的出现为圆锥曲线教学带来了新的教学方式.

一、借助几何画板活化学生对于圆锥曲线定义的理解

圆锥曲线本身就是由平面截二次锥面得到的曲线,其第一定义和第二定义都具有很强的几何属性和逻辑性,学生初次接触到这种生涩复杂的描述和公式定理时,往往难以理解,甚至产生畏难情绪[2].因此在传统圆锥曲线课堂教学中,大部分教师都会通过教具以板书的形式为学生画出圆锥曲线的图形,一些有经验的教师会详细演示圆锥曲线的构造过程.但是一方面,这些图形都是静态的或包含多个静态过程图象,对于学生来说直观程度提升了不少,但依旧不易理解,且这种方式十分依靠教师的讲解能力和学生的想象能力,导致对于不同教师和不同学生,最终的课堂教学效果相去甚远[3].另一方面,即便教师具备优秀的讲解能力,但绘制图形的过程十分复杂,难免带来许多不必要的时间消耗,课堂教学效率不高.

而借助几何画板,教师可以动态地演示圆锥曲线的生成过程、轨迹的运动过程、曲线上几何量的变化过程,还能用不同的颜色符号特效加以区分,将晦涩的、静态的圆锥曲线知识形象化、具体化、鲜活化,使得学生通过几何直观更加深入地了解圆锥曲线的定义,将圆锥曲线动态生成的过程展示给学生.

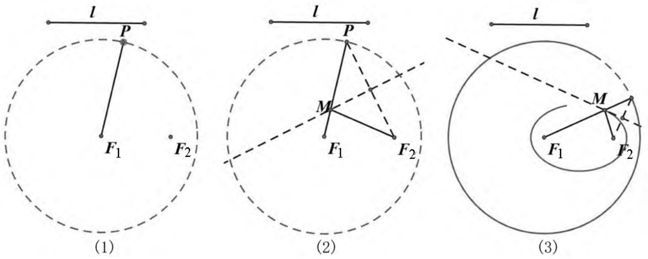

图 1

如在讲解椭圆第一定义的时候,可以借助圆,利用圆的半径这一定值来轻松绘制椭圆,如图 1(1)所示,可以在先取一定长的线段 l 作为椭圆上的点到两焦点距离之和,再以这个距离构造一个圆.如图 1(2)所示连接圆上一点 P 与 F_1,F_2,在 P 与 F_2 的连线上作一中垂线,交 PF_1 于点 M,此时 F_1M 与 MF_2 的和值恒为定长 l.此时如图 1(3)所示,拖动 P,M 即会形成椭圆的轨迹,整个绘制过程仅需一两分钟.教师不仅可以快速地通过软件轻松作图,也可以提前在几何画板上准备教学所需内容,上课时将文件导入信息媒体系统中,能够节约大量宝贵的课堂时间,即便是在讲解基础概念或简单的概念习题都能结合图形,充分提升教学质量.

例 1 已知一椭圆的方程为 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$,$A$ 点的坐标为(3,0),B 点的坐标为(−2,1),点 M 是该椭圆上

作者简介:黄发龙(1980—),男,甘肃民勤人,本科,中学一级教师,主要从事高中数学教学研究

的一个动点，请你计算 $|MA|+|MB|$ 的最小值应为（　　）

A. $6-\sqrt{2}$　　B. $10-\sqrt{2}$

C. $11-\sqrt{2}$　　D. $12-\sqrt{2}$

解析：本题选 B

根据题意可以得出 A 为椭圆的右焦点，设左焦点为 F_1，由椭圆的定义知 $|MF_1|+|MA|=10$，

故有：$|MA|+|MB|=10+|MB|-|MF_1|$.

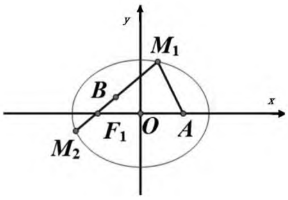

图 2

又因为，$||MB|-|MF_1||\leqslant|BF_1|$，借助几何画板作图 2，如图 2 所示，设直线 BF_1 交椭圆于 M_1，M_2 两点. 当 M 为点 M_1 时，$|MB|-|MF_1|$ 最小，$|MA|+|MB|$ 最小值为 $10-\sqrt{2}$. 故 B 正确.

二、借助几何画板深化二级结论的认识

圆锥曲线由于其知识点多，加之涉及的理论范畴丰富，几何规律性强等特点，还衍生出了众多的二级结论，这些二级结论对于学生快速解题带来了巨大的帮助尤其是对于客观题，若学生能对这些二级结论应用自如：客观题往往完成得又快又好. 并且很多二级结论的推导过程本身就是宝贵的主观题推理方法，因此二级结论对于圆锥曲线来说可谓不可不会. 但是要想充分吃透，理解并掌握这些二级结论并不是一件简单的事情，而几何画板同样有利于突破标点并总结这些二级结论. 教师在讲授圆锥曲线二级结论相关的知识或习题时，可以通过几何画板，充分地将二级结论的产生过程进行呈现，直观地投射到图形中，特别是对于蕴含数形结合思想的二级结论，这样能够让学生直观地了解结论得出的思路和过程，并且为理解性的记忆提供感性的支撑，对于让学生能够理解其推导证明过程和将其加以运用来说意义重大.

例 2　过一椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 外一点 $P(x_p,y_p)$ 与原点 O 的连线交椭圆于点 C,D，请你试着证明该椭圆在 C,D 的切线于切点弦平行.

解析：本证明题背后的二级结论：圆锥曲线外一点与原点的连线在与圆锥曲线交点处的切线与切点弦平行. 该结论在客观题中直接套用，以下是证明过程.

如图 3 所示：

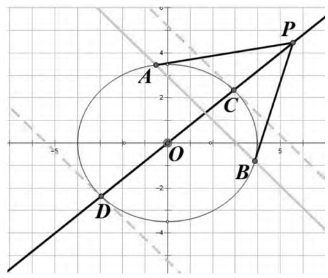

图 3

证明：过点 $P(x_p,y_p)$ 可作椭圆切线，那么可得切点弦：l_{AB}：$\frac{x_Px}{a^2}+\frac{y_Py}{b^2}=1$，那么当

（1）l_{OP} 斜率等于 0 或斜率不存在时，结论显然成立；

（2）当 l_{OP} 斜率存在时，可设 l_{OP}：$y=\frac{y_P}{x_P}x$，代入 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 中，得：

$x_C=-x_D=\frac{abx_P}{\sqrt{a^2y_P^2+b^2x_P^2}}$，$y_C=-y_D=\frac{aby_P}{\sqrt{a^2y_P^2+b^2x_P^2}}$，故可知

椭圆在 C 处的切线 l_C：$\frac{ab}{\sqrt{a^2y_P^2+b^2x_P^2}}\left(\frac{x_Px}{a^2}+\frac{y_Py}{b^2}\right)=1$；

椭圆在 D 处的切线 l_D：$\frac{-ab}{\sqrt{a^2y_P^2+b^2x_P^2}}\left(\frac{x_Px}{a^2}+\frac{y_Py}{b^2}\right)=1$；

均平行于切点弦 l_{AB}：$\frac{x_Px}{a^2}+\frac{y_Py}{b^2}=1$，得证.

三、借助几何画板辅助学生突破综合性问题

通过前文的描述，圆锥曲线在知识上的综合程度较高，且其中蕴涵了大量的数学思维，如数形结合思想、几何不变量的思想、条件转换的思想，因此在掌握

好基础题解题能力之上，必定要进行大量综合性习题的训练. 而对于这些综合性难题，几何画板又找到了用武之地，教师可以通过几何画板，在这些题目的讲解过程中轻松地作出图形，对于无论是定点、定值问题，最值问题，取值范围问题，坐标轴平移问题进行直观地展示.

几何画板带来的便利性不仅在于课堂中，同样也能辐射到课堂之外，在“双减”的大背景下，学生自主学习相较于课堂学习所占的比重有所提升. 而几何画板的易用性，能够让学生在作图和画图过程中提高效率，所作图形还能够动态地进行变化，比起手工草稿来说提升巨大，帮助学生更好地突破难题. 学生在使用几何画板的过程中也能感受到实践的乐趣，这也能给学生自主学习的动力和积极性带来一定提升.

例 3　已知点 $P(x, y)$ 是在曲线 $a|x|+b|y|=1(a>0,b>0)$ 上运动的点，且满足 $\sqrt{x^2+y^2+2y+1}+\sqrt{x^2+y^2-2y+1}\leqslant 2\sqrt{2}$，则 $a+\sqrt{2}b$ 的取值范围为(　　)

A. $[2,+\infty)$　　B. $[1,2]$

C. $[1,+\infty)$　　D. $[1,3]$

解析：本题选 A.

由 $\sqrt{x^2+y^2+2y+1}+\sqrt{x^2+y^2-2y+1}=\sqrt{x^2+(y+1)^2}+\sqrt{x^2+(y-1)^2}\leqslant 2\sqrt{2}$，其表示动点到点$(0,-1)$和点$(0,1)$的距离之和不大于 $2\sqrt{2}$，而由椭圆定义可知，上式取等号时，该动点的轨迹为 $x^2+\frac{y^2}{2}=1$. 对于 $a|x|+b|y|=1(a>0,b>0)$，当 $x>0,y\geqslant 0$ 时为直线 $ax+by=1$；当 $x\geqslant 0,y\leqslant 0$ 时为直线 $ax-by=1$；当 $x\leqslant 0,y\geqslant 0$ 时为直线 $-ax+by=1$.

根据图 4 所示，其表示菱形 $ABCD$. 由不等关系可知该菱形在椭圆内部，而 $C(\frac{1}{a},0)$，$D(0,\frac{1}{b})$，则 $\frac{1}{a}\leqslant 1,\frac{1}{b}\leqslant\sqrt{2}$. 那么 $a\geqslant 1,b\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2},a+\sqrt{2}b\geqslant 2$，故 A 正确.

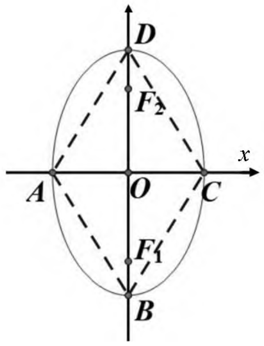

图 4

四、教师需要认清几何画板的辅助地位侧重思想方法的教学

虽然几何画板有万般好处，但需要注意的是，教师更应该侧重于思想方法的讲解和对学生解题思维构建的引导，虽然能够通过几何画板将习题进行直观地展示，有时甚至能直接看出结果，但容易让学生造成已经学会了的假象，甚至先入为主的通过图形来反推过程条件，违背了逻辑推理的过程，不利于解题思维的构建. 因此，虽然几何画板有很多益处，但其应该只是作为创新教学方法的新元素，应当处于辅助地位，而不能代替思想方法的重要性.

综上所述，将几何画板与圆锥曲线教学方法相融合，能够有效提升学生对于定义的理解，深化学生对于有关二级结论的认识，辅助学生突破综合性问题和自主学习，全面提升高中圆锥曲线教学效果. 在新时代教育背景下，《中国教育现代化 2035》对我国教育的信息化提出了更高的要求，将培养适应当下信息化环境的教师队伍作为重要任务，加快我国教育变革为我国教育安装智慧引擎，更加要求高中教师多加开展信息化教学软件的应用[4]. 未来高中数学教师应当扩大几何画板等新型信息化教学软件在高中数学教学中的应用，全面创新高中数学教学方法.

参考文献：

[1]　李晓薇. 几何画板在高中圆锥曲线教学中的应用研究[D]. 石家庄：河北师范大学，2021.

[2]　郑志超. GeoGebra 软件在高中圆锥曲线教学中的应用研究[D]. 济南：山东师范大学，2022.

[3]　甄勇杰. 基于网络画板提升高中生数学学习质量的教学设计与实践[D]. 重庆：重庆三峡学院，2021.

[4]　陈咸存. 用几何画板探究圆锥曲线——信息技术与数学学科融合创新的案例研究[J]. 宁波教育学院学报，2020，22(06)：121－124.

[甘肃省民勤县第一中学(733300)]