二级结论在圆锥曲线解题中的应用赏析

■江苏省盱眙中学 严培培

在高中数学解题中，如果适当应用一些二级结论，不仅可以减少计算量，简化思维过程，而且可以提高解题的速度及准确度，从而轻松拿到高分。

结论 1：焦点三角形的面积公式

1. 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 中，F_1、F_2 分别为左、右焦点，P 为椭圆上一点，则 $S_{\triangle PF_1F_2}=b^2\cdot\tan\frac{\theta}{2}$，其中 $\theta=\angle F_1PF_2$。

2. 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 中，F_1、F_2 分别为左、右焦点，P 为双曲线上一点，则 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}$，其中 $\theta=\angle F_1PF_2$。

例 1 已知 F_1，F_2 是椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的两个焦点，P 是椭圆上一点，$\angle F_1PF_2=60°$，则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积是（　　）。

A. 3　　B. 2　　C. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$　　D. $\sqrt{3}$

解析： 由题意可知 $b^2=3$，$\theta=\frac{\pi}{6}$，代入得 $S_{\triangle PF_1F_2}=b^2\tan\frac{\theta}{2}=3\cdot\tan\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$。故选 D。

例 2 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，过原点的直线与双曲线交于 A，B 两点，以线段 AB 为直径的圆恰好过双曲线的右焦点 F，若 $\triangle ABF$ 的面积为 $2a^2$，则双曲线的离心率为（　　）。

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$

C. 2　　D. $\sqrt{5}$

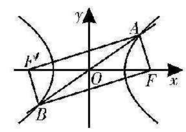


图 1

解析： 如图 1，设双曲线的左焦点为 F'，连接 AF'，BF'，因为以 AB 为直径的圆恰好经过双曲线的右焦点 $F(c,0)$，所以 $S_{\triangle AF'F}=2a^2$，且 $\angle F'AF=\frac{\pi}{2}$，根据双曲线焦

评注：对于以空间图形为背景的轨迹问题，只要抓住动点的特征，可以将立体几何问题转化到平面上，再利用比较熟悉的解析几何知识进行求解，收到了事半功倍的效果。

策略三、用坐标解析法

例 3 如图 5，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，侧面 PAD 为正三角形，底面 $ABCD$ 为正方形，侧面 $PAD\perp$ 底面 $ABCD$，M 为正方形 $ABCD$ 内（包括边界）的一个动点，且满足 $MP=MC$。则点 M 在正方形 $ABCD$ 内的轨迹为图 6 中的（　　）。

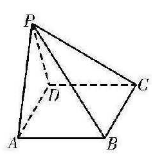
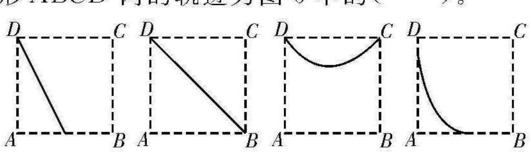


图 5



A　　B　　C　　D

图 6

解析： 如图 7，以 D 为原点，DA，DC 所在直线分别为 x 轴，y 轴，建立空间直角坐标系 D-xyz，设正方形 $ABCD$ 的边长为 a，$M(x,y,0)$，则 $0\leqslant x\leqslant a$，$0\leqslant y\leqslant a$，$P\left(\frac{a}{2},0,\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$，$C(0,a,0)$，则 $|\overrightarrow{MC}|=\sqrt{x^2+(a-y)^2}$，$|\overrightarrow{MP}|=\sqrt{\left(\frac{a}{2}-x\right)^2+y^2+\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2}$。由 $|\overrightarrow{MP}|=|\overrightarrow{MC}|$，得 $x=2y$，所以点 M 在正方形 $ABCD$ 内的轨迹为一条线段 $y=\frac{1}{2}x(0\leqslant x\leqslant a)$。故选 A。

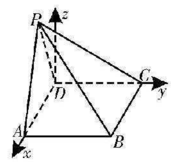


图 7

评注："数缺形时少直观，形缺数时难入微"，对于有些轨迹问题，如果从几何角度不容易入手的话，可以转变思路，利用代数方法即解析法可方便快捷地求解出其轨迹方程。

（责任编辑 王福华）

点三角形的面积公式知 $S_{\triangle AF'F}=\dfrac{b^2}{\tan\dfrac{\angle F'AF}{2}}$，所以 $2a^2=b^2$，结合 $c^2=a^2+b^2$，得 $2a^2=c^2-a^2$，$c^2=3a^2$，则 $e^2=3$，所以 $e=\sqrt{3}$。故选 B。

结论 2：中心弦的性质

设 A,B 为圆锥曲线上关于原点对称的两点，P 是曲线上与 A,B 不重合的任意一点，则 $k_{PA}\cdot k_{PB}=e^2-1$。

例 3 如图 2，在平面直角坐标系 xOy 中，F_1、F_2 分别为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，B、C 分别为椭圆的上、下顶点，直线 BF_2 与椭圆的另一交点为 D，$e=\dfrac{3}{5}$，若 $\cos\angle F_1BF_2=\dfrac{7}{25}$，则直线 CD 的斜率为____。

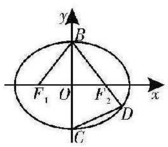


图 2

解析：设 $\angle DBO=\theta$，则 $\cos\angle F_1BF_2=\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=\dfrac{7}{25}$，$\cos^2\theta=\dfrac{16}{25}$，$\cos\theta=\dfrac{4}{5}$，利用 $\mathrm{Rt}\triangle F_2OB$ 易知 $k_{BD}=-\dfrac{4}{3}$，因为 $e=\dfrac{3}{5}$，由 $k_{BD}\cdot k_{CD}=e^2-1$，得 $k_{CD}=\dfrac{12}{25}$。

结论 3：中点弦的性质

设圆锥曲线中以 $M(x_0,y_0)(y_0\neq 0)$ 为中点的弦 AB 所在的直线的斜率为 k。

1. 若圆锥曲线为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，则 $k_{AB}=-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$，$k_{AB}\cdot k_{OM}=e^2-1$。

2. 若圆锥曲线为双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，则 $k_{AB}=\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$，$k_{AB}\cdot k_{OM}=e^2-1$。

3. 若圆锥曲线为抛物线 $y^2=2px(p>0)$，则 $k_{AB}=\dfrac{p}{y_0}$。

例 4 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左、右顶点分别为 A_1、A_2，点 P 在椭圆 C 上，且直线 PA_2 的斜率的取值范围是 $[-2,-1]$，那么直线 PA_1 的斜率的取值范围是（　　）。

A. $\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}\right]$　　B. $\left[\dfrac{3}{8},\dfrac{3}{4}\right]$

C. $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$　　D. $\left[\dfrac{3}{4},1\right]$

解析：由对称弦结论知 $k_{PA_1}\cdot k_{PA_2}=e^2-1=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-1=-\dfrac{3}{4}$，又 $k_{PA_2}\in[-2,-1]$，所以 $k_{PA_1}=-\dfrac{3}{4k_{PA_2}}\in\left[\dfrac{3}{8},\dfrac{3}{4}\right]$。故选 B。

结论 4：焦点弦的性质

1. 过椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点 F 且倾斜角为 $\alpha(\alpha\neq 90^\circ)$ 的直线交椭圆于 A,B 两点，且 $|\overrightarrow{AF}|=\lambda|\overrightarrow{FB}|$，则椭圆的离心率等于 $\left|\dfrac{\lambda-1}{(\lambda+1)\cos\alpha}\right|$。

2. 过双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点 F 且倾斜角为 $\alpha(\alpha\neq 90^\circ)$ 的直线交双曲线的右支于 A,B 两点，且 $|\overrightarrow{AF}|=\lambda|\overrightarrow{FB}|$，则双曲线的离心率等于 $\left|\dfrac{\lambda-1}{(\lambda+1)\cos\alpha}\right|$。

3. 过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 且倾斜角为 θ 的直线交抛物线于 A,B 两点，则两焦半径长为 $\dfrac{p}{1-\cos\theta}$，$\dfrac{p}{1+\cos\theta}$，且有 $\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}=\dfrac{2}{p}$，$|AB|=\dfrac{2p}{\sin^2\theta}$，$S_{\triangle AOB}=\dfrac{p^2}{2\sin\theta}$。

例 5 已知椭圆 Γ：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的长轴是短轴的 2 倍，过右焦点 F 且斜率为 $k(k>0)$ 的直线与椭圆 Γ 相交于 A,B 两点，且 $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$，则 $k=$（　　）。

A. 1　　B. 2　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{2}$

解析：依题意 $a=2b$，所以 $e=\sqrt{1-\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$。又 $\lambda=3$，由 $e=\left|\dfrac{\lambda-1}{(\lambda+1)\cos\alpha}\right|$ 得 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\left|\dfrac{3-1}{(3+1)\cos\alpha}\right|$，$|\cos\alpha|=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$。又 $k>0$，则 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，得 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$k=\tan\alpha=\sqrt{2}$。故选 D。

（责任编辑　王福华）