《数列中的方程问题》复习课教学构思及体会

江苏常熟市浒浦高级中学(215500)　王　琪

[摘　要]《数列中的方程问题》在历年高考解答题中基本稳居压轴题位置,学生在解答时往往由于对问题的整体把握不够而"搁浅".研究这部分内容的复习教学,能有效培养学生的逻辑推理能力与数学运算素养.

[关键词]数列;方程问题;构思;体会

[中图分类号]　G633.6　　[文献标识码]　A　　[文章编号]　1674-6058(2021)14-0020-02

数列是高中数学的核心内容之一,在高考中占有重要的地位,它在历年高考解答题中基本稳居压轴题位置.高考数列问题往往集数列、函数、方程、不等式等知识于一体,蕴含着丰富的数学思想,不仅考查学生的逻辑推理能力,而且考查学生数学运算的素养.学生在解答时往往由于对问题的整体把握不够而"搁浅".为此,笔者在二轮复习中构思了一堂《数列中的方程问题》专题复习课,供同仁参考.

一、选题构思

(一)基础训练

1.已知数列$\{a_n\}$的前n项和S_n满足:$S_m+S_n=S_{m+n}$,且$a_1=1$.那么$a_{10}=$________.

2.已知数列$\{a_n\}$的前n项和S_n满足:$S_m\cdot S_n=S_{m+n}$,且$a_1=2$.那么$a_{10}=$________.

3.已知数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,$a_2=0$,若对任意的正整数m和$n(n>m)$满足:$a_n^2-a_m^2=a_{n-m}\cdot a_{n+m}$,则$a_{119}=$________.

说明:三道基础题,难度不大,主要起到"热身"的作用,激活学生的思维.

(二)例题与变式

[例1]已知数列$\{a_n\}$的前三项分别为$a_1=5$,$a_2=6$,$a_3=8$,且数列$\{a_n\}$前n项和S_n满足$S_{n+m}=\frac{1}{2}(S_{2n}+S_{2m})-(n-m)^2$,其中$m,n$为任意正整数.求数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n$.

解析:令$n=1,m=2$,$S_3=\frac{1}{2}(S_2+S_4)-1$,

$S_4=29$,$a_4=10$.

令$m=1$,$S_{n+1}=\frac{1}{2}(S_{2n}+S_2)-(n-1)^2$,令$m=2$,$S_{n+2}=\frac{1}{2}(S_{2n}+S_4)-(n-2)^2$,

$\therefore\ a_{n+2}=S_{n+2}-S_{n+1}=2n-3+\frac{S_4+S_2}{2}=2n+6=2(n+2)+2$,$\therefore a_n=2n+2$,$(n\geqslant 3)$

又$a_2=6$(符合),$a_1=5$(不符合).

$$\therefore a_n=\begin{cases}5(n=1),\\2n+2(n\geqslant 2).\end{cases}$$

变式1:设数列$\{a_n\}$的各项都为正数,前n项和为S_n,对于任意正整数m、n,有$S_{n+m}=\sqrt{2a_{2m}(1+S_{2n})}-1$.若$a_1=1$,求$a_2,a_3,a_4$及$a_n$.

解析:由条件,令$m=n=1$,得$1+S_2=\sqrt{2a_2(1+S_2)}$.

$\therefore(1+S_2)^2=2a_2(1+S_2)$,则$1+S_2=2a_2$.

$\therefore a_2=1+a_1$,$\because a_1=1$,$\therefore a_2=2$.令$m=1$,$n=2$,得$1+S_3=\sqrt{2a_2(1+S_4)}$,则$(4+a_3)^2=4(4+a_3+a_4)$.

令$m=2$,$n=1$,得$1+S_3=\sqrt{2a_4(1+S_2)}$.

则$(4+a_3)^2=8a_4$.

解得$a_3=4$,$a_4=8$.得$1+S_{m+n}=\sqrt{2a_{2m}(1+S_{2n})}$.

令$m=1$,得$1+S_{n+1}=\sqrt{2a_2(1+S_{2n})}$.令$m=2$,得$1+S_{n+2}=\sqrt{2a_4(1+S_{2n})}$.

$\therefore\frac{1+S_{n+2}}{1+S_{n+1}}=\sqrt{\frac{a_4}{a_2}}(n\in\mathbf{N}^*)$.$\because\sqrt{\frac{a_4}{a_2}}=2$,

则数列$\{1+S_n\}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$是公比为2的等比数列,$\therefore 1+S_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$,$a_n=2^{n-1}$.

[例2]数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,$a_2=2$.数列$\{b_n\}$满足$b_n=a_{n+1}+(-1)^n a_n$,$n\in\mathbf{N}^*$.

(1)若数列$\{a_n\}$是等差数列,求数列$\{b_n\}$的前6项和S_6;

(2)若数列$\{b_n\}$是公差为2的等差数列,求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(3)若$b_{2n}-b_{2n-1}=0$,$b_{2n+1}+b_{2n}=\frac{6}{2^n}$,$n\in\mathbf{N}^*$,求数列$\{a_n\}$的前$2n$项和$T_{2n}$.

解析:(1)$\because a_1=1$,$a_2=2$,数列$\{a_n\}$是等差数列,$\therefore a_n=n$,则$b_1=b_3=b_5=1$,$b_2=5$,$b_4=9$,$b_6=13$,$\therefore S_6=b_1+b_2+\cdots+b_6=30$.

(2)$\because b_1=a_2-a_1=2-1=1$,数列$\{b_n\}$是公差为2的等差数列,$\therefore b_n=2n-1$.

$\because b_{2n-1}=a_{2n}-a_{2n-1}$,$b_{2n}=a_{2n+1}+a_{2n}$,

$\therefore a_{2n}-a_{2n-1}=4n-3$,$a_{2n+1}+a_{2n}=4n-1$.

$\therefore a_{2n+1}+a_{2n-1}=2$.

则$a_{2n+3}+a_{2n+1}=2$,$\therefore a_{2n+3}=a_{2n-1}$.(*)

$\because a_1=1$,$\therefore a_3=1$.则$a_{4n-3}=a_1=1$,$a_{4n-1}=a_3=1$.$\therefore a_{2n-1}=1$.

则 $a_{2n}=4n-2$，$\therefore a_n=\begin{cases}1 & (n\text{为奇数}),\\ 2n-2 & (n\text{为偶数}).\end{cases}$

(3) $\because b_{2n}-b_{2n-1}=0, b_{2n+1}+b_{2n}=\dfrac{6}{2^n}, n\in\mathbf{N}^*$，

而 $b_{2n-1}=a_{2n}-a_{2n-1}, b_{2n}=a_{2n+1}+a_{2n}, b_{2n+1}=a_{2n+2}-a_{2n+1}$，$\therefore a_{2n+1}+a_{2n-1}=0, a_{2n+2}+a_{2n}=\dfrac{6}{2^n}(n\in\mathbf{N}^*)$.

当 n 是偶数时，则 $T_{2n}=(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1})+(a_2+a_4+\cdots+a_{2n})$ $T_{2n}=0+\dfrac{3\times\left[1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{n}{2}}\right]}{1-\dfrac{1}{4}}$

$$=4-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2};$$

当 n 是奇数时，则 $T_{2n}=a_1+a_2+(a_3+\cdots+a_{2n-1})+(a_4+\cdots+a_{2n})=3+0+\dfrac{\dfrac{3}{2}\cdot\left[1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right]}{1-\dfrac{1}{4}}=5-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$.

综上，$T_{2n}=\dfrac{9-(-1)^n}{2}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$.

变式2：已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，前 n 项和为 S_n，$a_{n+1}=\begin{cases}pa_n+n-1(n\text{为奇数}),\\ -a_n-2n(n\text{为偶数}).\end{cases}$

(1)若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=a_{2n}+a_{2n+1}(n\geqslant1)$，试求数列 $\{b_n\}$ 前 n 项和 T_n；

(2)若数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n=a_{2n}$，试判断 $\{c_n\}$ 是否为等比数列，并说明理由；

(3)在(2)的条件下，若 $\{c_n\}$ 为等比数列，问是否存在 $n\in\mathbf{N}^*$，使得 $(S_{2n+1}-10)c_{2n}=1$？若存在，求出所有的 n 的值；若不存在，请说明理由.

解析：(1)据题意得 $b_n=a_{2n}+a_{2n+1}=-4n$，所以 $\{b_n\}$ 成等差数列，故 $T_n=-2n^2-2n$.

(2)当 $p=\dfrac{1}{2}$ 时，数列 $\{c_n\}$ 成等比数列；当 $p\neq\dfrac{1}{2}$ 时，数列 $\{c_n\}$ 不成等比数列.

理由如下：因为 $c_{n+1}=a_{2n+2}=pa_{2n+1}+2n=p(-a_{2n}-4n)+2n=-pc_n-4pn+2n$，所以 $\dfrac{c_{n+1}}{c_n}=-p+\dfrac{2n(1-2p)}{c_n}$，故当 $p=\dfrac{1}{2}$ 时，数列 $\{c_n\}$ 是首项为1，公比为 $-\dfrac{1}{2}$ 的等比数列；当 $p\neq\dfrac{1}{2}$ 时，数列 $\{c_n\}$ 不成等比数列.

(3)当 $p=\dfrac{1}{2}$ 时，$a_{2n}=c_n=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$，

$$a_{2n+1}=b_n-a_{2n}=-4n-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

因为 $S_{2n+1}=a_1+b_1+b_2+\cdots+b_n=-2n^2-2n+2(n\geqslant1)$，$\because(S_{2n+1}-10)c_{2n}=1$. $\therefore$ $4n^2+4n+16=4^n$. 当 $n=1$、2，左边<右边；当 $n=3$，左边=右边. 下证 $n=3$ 是方程唯一的解.

设 $f(x)=4^x-4x^2-4x-16(x\geqslant3)$，则 $g(x)=f'(x)=4^x\ln4-8x-4$.

$\therefore g'(x)=(\ln4)^2 4^x-8>0(x\geqslant2)$，且 $g(2)=f'(2)>0$. $\therefore f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 递增，且 $f(3)=0, f(1)\neq0$. $\therefore$ 仅存在唯一的 $n=3$ 使得 $(S_{2n+1}-10)c_{2n}=1$ 成立.

说明：例题主要由教师讲解，起到引领示范作用. 变式则是例题的深化与拓展，具有一定难度，由学生独立完成或合作完成，通过变式练习达到本节课的复习目的.

二、教学体会

在第二轮复习中，选题应瞄准高考要求，难度适当加大.

数列的本质就是函数，是离散函数. 无论从等差数列和等比数列的通项公式，还是其求和公式来说，它们都是定义域为正整数集合的函数，所以解决数列问题，我们有时应回归到函数上，利用函数与方程的思想去解. 如处理数列的最值问题，处理数列的单调性问题，教师应引导学生用函数观点去分析数列，从而解决数列问题，实现由此及彼的知识迁移.

数列除了具有函数的基本特征外，它还有其本身的固有特征，那就是迭代关系，或者称为递推关系. 尤其是对于较难的数列问题，往往需要多次赋值，多次迭代才能解决，这也是高考数列题的特征. 因此，二轮复习中教师应引导学生加强这方面的训练，类比函数方程中的常用方法，通过巧妙赋值，来解决数列中的方程问题. 当然，这类问题也要求学生有较强的应变能力，有较高的数学运算素养.

此外，在第二轮复习中，我们也应加强对数列不等式的训练，尤其是放缩法的应用，加强对数列方程的解法研究，让学生学会用“夹逼法”来解决不定方程问题，用“奇偶分析法”来探究数列等式是否成立. 当然这些都要求学生有较高的能力.

[参 考 文 献]

[1] 王知博，郭建华. 数列的不定方程求解归类[J]. 中学数学研究，2019(2)：35-37.

[2] 毛东良. 微专题“数列中的不定方程整数解问题求解策略”的教学与反思[J]. 中学数学月刊，2018(1)：29-31.

[3] 王海东. 数列中的不定方程问题[J]. 高中数学教与学，2015(5)：25-27.

[4] 蔡莹. 揭开“不定”方程的面纱：对数列中不定方程整数解问题的探究与反思[J]. 数学之友，2014(3)：65-67+71.

(责任编辑 黄桂坚)