

灵活运用放缩法,提升证明数列不等式的效率

王海桥

数列不等式问题通常较为复杂,需灵活运用数列、函数、不等式、方程等知识,才能顺利解题.放缩法是解答数列不等式证明问题常用的方法,运用该方法解题,需将要证明的数列不等式一侧或两侧的式子进行适当的放大或缩小,再利用不等式的传递性证明数列不等式成立.那么如何进行放缩呢?下面介绍两个放缩的技巧.

一、通过裂项放缩不等式

有些数列不等式中的各项为分式,此时可将其进行适当的变形,使其化为两项之差的形式,利用裂项相消法求数列的和.再根据数列的和的结构特征,进行适当的放缩,从而证明数列不等式成立.若数列的通项公式无法裂项,可先将其进行适当的放缩,再裂项、求和.

例1.求证: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < \frac{5}{3}$.

证明: 因为 $\frac{1}{k^2} = \frac{4}{4k^2} < \frac{4}{4k^2 - 1} = 2\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$,

$$\begin{aligned} \text{则 } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} &= 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^n 2\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) \\ &= 1 + 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \\ &= 1 + 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1}\right) < 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

该数列的通项公式为分式,可根据不等式的可加性和传递性,将其放缩为 $\frac{4}{4k^2 - 1}$,再将其裂项为 $2\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$,这样便可运用裂项相消法求得数列的和,运用放缩法快速证明不等式.

例2.求证: $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{7}{4}$.

证明: 当 $n \geq 2$ 时, $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$,

$$\begin{aligned} \text{则 } \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} &< \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{5}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) < \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

我们很难直接求得不等式左边式子的结果,于是将数列的通项公式 $\frac{1}{n^2}$ 的分母放缩,得到 $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$

$= \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$,这样便可通过裂项求和,求得不等式左边式子的结果,从而证明数列不等式.

二、通过添项或舍项放缩不等式

有时数列的通项公式加上或减去一个常数,即可

化为可裂项的数列,或等差、等比数列,这样便可根据裂项求和法,等差、等比数列的前 n 项和公式进行求和.有时我们可以快速求得数列的和,但该结果与要求证的目标存在一定的差距,此时可通过添项或舍项,将和式放大或缩小,以证明不等式.

例3.已知 $a_n = 2^n - 1$,求证: $\frac{n}{2} - \frac{1}{3} < \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_{n+1}}$.

证明: $\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{2^k - 1}{2^{k+1} - 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2^{k+1} - 1)}$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \times 2^k + 2^k - 2} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2^k}, k \in \mathbb{N}^+,$$

$$\text{则 } \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \frac{n}{2} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \right)$$

$$= \frac{n}{2} - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) > \frac{n}{2} - \frac{1}{3},$$

$$\text{所以 } \frac{n}{2} - \frac{1}{3} < \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

我们根据该通项公式很难求得数列的和,于是将其中的 $3 \times 2^k - 2$ 舍去,得到 $\frac{a_k}{a_{k+1}} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2^k}$.再根据等比数列的通项公式进行求和,即可证明不等式.

例4.已知 $a_n = \sqrt{1 \times 2} + \sqrt{2 \times 3} + \cdots + \sqrt{n(n+1)}$,求证: $\frac{n(n+1)}{2} < a_n < \frac{(n+1)^2}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{证明: } \sqrt{n(n+1)} &> \sqrt{n^2} = n, \sqrt{n(n+1)} < \sqrt{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{2n+1}{2}, \text{ 所以 } n < \sqrt{n(n+1)} < \frac{2n+1}{2}, \end{aligned}$$

$$\text{则 } 1 + 2 + 3 + \cdots + n < a_n < \frac{1 + 3 + \cdots + (2n+1)}{2},$$

$$\text{即 } \frac{n(n+1)}{2} < a_n < \frac{(n+1)^2}{2}.$$

解答本题,需要先通过添项 n 和 $\frac{1}{4}$,将数列的通项公式 $\sqrt{n(n+1)}$ 放缩为 $\sqrt{n^2} = n$ 、 $\sqrt{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{2n+1}{2}$,得到 $n < \sqrt{n(n+1)} < \frac{2n+1}{2}$;然后将 $\{n\}$ 和 $\left\{\frac{2n+1}{2}\right\}$ 看作等差数列,根据等差数列的前 n 项和公式进行求和,即可证明不等式.

运用放缩法证明数列不等式的关键在于对数列的通项公式、和式进行适当的放缩.这就要求我们熟练掌握一些进行放缩的技巧,并根据不等式的结构特征合理进行放缩,从而实现快速解题的目的.

(作者单位:江苏省南通市海门证大中学)