

基于高考试题的高中数学圆锥曲线解题技巧探析

潘丽娜

摘要:圆锥曲线不仅是高中数学教学的重要内容,而且还是平面几何的主要知识,圆锥曲线的相关问题解答中,通常会使用直线方程的相关知识,因此,教师需注重培养学生具备有效的解题技巧,以提升学生的数学水平。但是,在对圆锥曲线的相关习题进行解答时,仍会出现较多错误,对其原因分析,就是学生没有充分掌握解题技巧。基于此,本文主要以高考试题为例,对高中数学中圆锥曲线的解题技巧进行探析,以提高学生解题的正确率。

关键词:高考;高中数学;圆锥曲线;解题技巧;探析

近些年圆锥曲线在数学高考试题中的出现方式通常有两种,即主观题与客观题。圆锥曲线主要包含抛物线、椭圆、双曲线,其虽然是平面图形,但解析几何从圆锥曲线的概念进行理解时,就发挥着重要作用。对于圆锥曲线而言,其命题首先是围绕其概念与性质进行的,然后使圆锥曲线和直线的位置关系,将代数作为基础,对圆与直线的性质进行学习,并从直观的理解中融入几何的抽象概念。随着对几何性质的探讨逐渐深入,对高中数学的圆锥曲线试题进行解题,思想上也会涉及化归思想、数形结合思想、函数和方程思想、分类讨论思想等。由于通过圆锥曲线作为主线试题有很多变体,因此,在对高考试题进行处理中,不仅要求综合应用相关思想方法,而且还要求学生具备相应的计算能力,以确保学生解题的正确率。

一、存在性问题

所谓的存在性问题,其主要就是对某个或者某些条件中的点、曲线、直线等几何元素的存在性问题。该类问题主要是以开放性设问的方式提出,如果存在满足条件的参数值或者几何元素,就需求出这些参数值或者几何元素,如果不存在,则需要给出相应的理由进行说明。该类型问题的求解策略为:首先,需假设符合条件的参数值或者几何元素,然后根据相关条件与题目中的已知条件相结合实施推理和计算,如果没有矛盾,且得到了相关参数值或者几何元素,表明符合条件的参数值或者几何元素存在;如果通过推理和计算后出现矛盾,则表明符合条件的参数值或者几何元素不存在,而推理和计算过程也就是说明的理由。

例如,已知椭圆 G 中心处于坐标原点,其长轴在 x 轴上,离心率是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,两焦点为 F_1 和 F_2 ,椭圆 G 上一个点至 F_1 和 F_2 的距离和是 12。圆 C_k 为 $x^2 + y^2 + 2kx - 4y - 21 = 0 (k \in \mathbf{R})$ 的圆心是点 A_k 。

(1)求取椭圆 G 方程;

(2)求取 $\triangle A_k F_1 F_2$ 面积;

(3)问是否存在圆 C_k 包围椭圆 G ? 请说明理由。

解:(1)设椭圆 G 方程是: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$,

且半距设为 c ,

$$\text{由} \begin{cases} 2a = 12 \\ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}, \text{可得} \begin{cases} a = 6 \\ c = 3\sqrt{3} \end{cases}$$

由上式可知, $b^2 = a^2 - c^2 = 9$

即椭圆的方程是: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$

(2) 根据圆 C_k 的方程式得,圆心的坐标是 $(-k, 2)$

因此, $\triangle A_k F_1 F_2$ 面积为: $S_{\triangle A_k F_1 F_2} = \frac{1}{2} \times F_1 F_2 \times 2 = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} \times 2 = 6\sqrt{3}$

(3) 如果 $k \geq 0$, 根据 $x^2 + y^2 + 2kx - 4y - 21 = 0$ 为 $6^2 + 0^2 + 12k - 0 - 21 = 15 + 12k > 0$ 可得点 $(6, 0)$ 在圆 C_k 外; 如果 $k < 0$, 根据 $x^2 + y^2 + 2kx - 4y - 21 = 0$ 为 $(-6)^2 + 0^2 - 12k - 0 - 21 = 15 - 12k > 0$ 可得点 $(-6, 0)$ 在圆 C_k 外, 因此, 圆 C_k 不能包围椭圆 G 。

二、定点、定值问题

圆锥曲线当中的定点、定值问题作为高考考查的热点,其主要指某些图形面积、几何量线段长度、直线斜率、角的度数等大小或代数表达式的数值等与试题当中的相关参数无关,不会因为参数的变化而发生变化,而是个确定值。该类型的试题主要是解答题,其解决的思路主要是从量变过程寻求不变,也就是先通过变量表示出要求的点或量的坐标,并进行推理计算,导出的点或量的坐标与其变量无关。该类试题常见类型有:(1)动圆过定点的问题;(2)直线过定点的问题;

(3)求取定值的问题;(4)证明定值的问题。求解的策略:(1)根据特殊,求取定值,并证明该值和变量无关;(2)直接进行推理与计算,然后在推理与计算的过程中除去变量,以获得定值。

例如,已知动直线 $y=k(x+1)$ 和椭圆 $C: \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$ 相交点为 A, B , 已知点 $M(-\frac{7}{3}, 0)$, 求取 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ 是定值。

证明:设交点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

由 $\begin{cases} y=k(x+1) \\ x^2+3y^2=5 \end{cases}$, 消去 y 可得 $(1+3k^2)x^2+6k^2x+3k^2-5=0$

$$\text{由 } x_1+x_2=\frac{-6k^2}{1+3k^2}, x_1x_2=\frac{3k^2-5}{1+3k^2}$$

$$\overrightarrow{MA}=(x_1+\frac{7}{3}, y_1), \overrightarrow{MB}=(x_2+\frac{7}{3}, y_2)$$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}=(x_1+\frac{7}{3})(x_2+\frac{7}{3})+y_1y_2=(1+k^2)x_1x_2+(\frac{7}{3}+k^2)(x_1+x_2)+\frac{49}{9}+k^2=\frac{4}{9}$$

因此, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ 是定值。

总之,定值问题主要是在运动与变化过程中找出不变量,其基本思路主要是运用参数对需要解决的问题进行表示,并证明需解决的问题和参数毫无关系。

三、取值范围的问题

圆锥曲线中常见的问题就是求取范围类的问题。对圆锥曲线的范围问题基本思想就是构建目标函数及不等关系,依据目标函数与不等式求取范围,因此,该类型的问题解决难点就是构建目标函数以及不等关系。构建目标函数或者是不等关系的重点就是选择合适的变量,其原则主要是该变量可以表达需解决的问题,该变量通常是直线的截距、直线的斜率、点的坐标等,需依据问题的具体状况进行灵活处理。对参数范围进行求取的方法为:依据已有条件构建不等式或者等式函数的关系,然后求取参数范围,并根据相关定理对问题实施深入理解与分析,从而实现有效解题。

例如,椭圆下顶点是 $A(0, -1)$, 焦点在 x 轴上, 如果右焦点至直线 $x-y+2\sqrt{2}=0$ 的距离是 3。

(1)求椭圆方程;

(2)假设直线 $y=kx+m(k \neq 0)$ 和椭圆交于不同两点 M, N , 当 $|AM|=|AN|$ 时, 求取 m 的具体取值范围。

解:(1)设椭圆方程是: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 且右焦点 $F_2(c, 0)(c>0)$, 椭圆下顶点是 $A(0, -1)$, 因此, $b=1$, 而右焦点至直线 $x-y+2\sqrt{2}=0$ 距离为 $|\frac{c-0+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}| =$

3, 可得 $c=\sqrt{2}$

因此, $a^2=b^2+c^2=3$, 椭圆方程是 $x^2/3+y^2=1$ 。

(3)设 P 是 MN 的中点, 根据 $\begin{cases} y=kx+m \\ x^2/3+y^2=1 \end{cases}$ 可得,

$$(3k^2+1)x^2+6mkx+3(m^2-1)=0,$$

因为, 直线和椭圆之间有两个交点, $\Delta>0$, 即 $m^2<3k^2+1$ ①

$$\text{所以, } x_p=\frac{x_M+x_N}{2}=-\frac{3mk}{3k^2+1}, \text{ 而 } y_p=kx_p+m=\frac{m}{3k^2+1}$$

$$\text{所以, } k_{AP}=\frac{y_p+1}{x_p}=-\frac{m+3k^2+1}{3mk},$$

又因为 $|AM|=|AN|$, 所以, $AP \perp MN$,

$$\text{且 } -\frac{m+3k^2+1}{3mk}=-\frac{1}{k}, \text{ 而 } 2m=3k^2+1 \quad \text{②}$$

将②代入到①中可知 $2m>m^2$, 可知 $0<m<2$,

$$\text{由②可知 } k^2=\frac{2m-1}{3}>0, \text{ 可得 } m>\frac{1}{2}.$$

因此, m 的取值范围为 $(\frac{1}{2}, 2)$ 。

总之,求范围的问题主要是构建求解某变量目标函数,并以该函数的值域对目标范围进行确定。在构建函数中,需按照题目其他的已知条件,将需要运用的量通过变量进行表示,为了便于运算,构建关系中也可运用多个变量,只要结果中多个变量能够归结成单个变量即可,另外需注意变量的具体取值范围。

四、结束语

综上所述,圆锥曲线的相关知识结构中通常包含了多种类型问题,和其他相关知识比较,圆锥曲线的问题难度通常更大,且对学生的数学学习能力及综合素养有着更高的要求。因此,高中生不仅需掌握相关数学知识,而且还要对圆锥曲线的相关命题特征进行了解,以此对圆锥曲线的相关问题的解题技巧进行充分掌握,并在高考中占据显著优势。

参考文献:

- [1]李代辉.圆锥曲线中的平面几何解法分析:2019年高考数学试题圆锥曲线部分求解有感[J].科学咨询:科技·管理,2019(11):166.
- [2]章玉.高考圆锥曲线最值问题常见类型及解法探究[J].现代商贸工业,2019,40(28):171-172.

作者简介:

潘丽娜,福建省南平市,福建省浦城县浦城一中。