高考数列不等式的证明方法与技巧

■刘　艳

【摘　要】高考数列不等式的证明是难点中的难点,需要很强的证明技巧以及熟练的代数变换能力;本文则从数列求和的裂项相消法谈起,利用裂项相消法的思想来对数列进行放缩;与此同时,函数思想也是不等式放缩的一大利器.借助于这两项技巧,可以应对相当一类数列不等式的证明.

【关键词】等差数列;裂项相消法;递推公式;函数逼近

数列不等式的证明在高考中通常都是以压轴大题的形式出现,其证明往往需要很高的不等式证明技巧,尤其以放缩法为甚;使得大多数同学对这类问题是望而生畏、一筹莫展.感觉解答这种类型的问题都是无依无靠,平时所积累的知识与方法在这里都使不上劲.解答这类问题基本上属于没有目的、也没有方向.

本文从裂项相消法与函数两个不同的角度,给出了数列不等式证明的一般思路,使得数列不等式的证明有案可依,以至于在考试时不会无从下手.下面先从最基本的裂项相消法开始.

例1[1]　记S_n为数列a_n的前n项和,已知$a_1=1$,$\frac{S_n}{a_n}$是公差为$\frac{1}{3}$的等差数列,(1)求a_n的通项公式;(2)证明:$T_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}<2$.

解　(1)通项公式为:$a_n=\frac{n(n+1)}{2}$,过程从略.

(2)本题是求数列$\frac{1}{a_n}=\frac{2}{n(n+1)}$的前$n$项和$T_n$的一个上限.对于所有数列的前$n$项和$S_n$的有界性或者上(下)限的问题,其处理的原则都是把该数列的通项进行转化或者放缩到一个可以求和的数列.所以在求解这类问题之前,首先心里就要对可以求和的数列如数家珍;这样才有可能作出合适的转化或放缩,否则的话,是完全没有方向.在高中阶段,可以求和的数列类型并不是很多,除了基本的等差等比数列之外;还有一类非常重要的数列,就是可以裂项相消的数列.当然还有等差数列与等比数列的乘积数列也是可以用错位相减法求和.

通项$\frac{1}{a_n}$可以拆成两项之差的形式,即$\frac{1}{a_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$,显然这是一个可以求和的数列,因此有:

$$\frac{1}{2}T_n=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=1-\frac{1}{n+1}<1$$

从而有$T_n<2$.

本题是典型的裂项相消法的使用,可以把这个结论推广到更为一般的结果,只要在问题中看到数列的通项公式是形如:$a_n=\frac{Q(n)}{P(n)}$的形式,这里的$P(n)$,$Q(n)$都是多项式,并且要求$Q(n)$的最高项次数小于$P(n)$的最高项次数,基本上都可以用裂项相消法的思想来考虑问题.这是最为常见的裂项相消法的形式,裂项相消法也可以与等比数列结合起来.

练习1:设数列的通项公式为$c_n=\frac{1}{3^n-1}-\frac{1}{3^{n+1}-1}$,计算其前$n$项和$S_n$.

解　显然数列c_n的形式具有裂项相消法的特点,所以有:

$$S_n=(\frac{1}{3^1-1}-\frac{1}{3^2-1})+(\frac{1}{3^2-1}-\frac{1}{3^3-1})+(\frac{1}{3^3-1}-\frac{1}{3^4-1})+\cdots+(\frac{1}{3^n-1}-\frac{1}{3^{n+1}-1})=\frac{1}{2}-\frac{1}{3^{n+1}-1}.$$

作者简介:刘艳(1977-),女,江苏邳州人,硕士,主要从事高中数学教学研究

从这里可以看到,裂项相消法的形式是多种多样的,一般的只要是形如 $f(n)-f(n+1)$ 形状的数列都是可以裂项相消的.

例 2 (2014 年高考新课标 Ⅱ 卷理科第 17 题改编)已知数列 $a_n=\frac{1}{3^n-1}$,其前 n 项和为 S_n,证明:$S_n<\frac{3}{4}$.

证明 这是一个典型的把数列的通项公式放缩到一个可以求和数列的问题.通常情况下就是寻找一个可以求和的数列 c_n,其前 n 项和为 T_n;满足 $a_n\leqslant c_n$ 并且有 $T_n<\frac{3}{4}$.同时满足这两个条件的数列并不是很好构造.这里可以考虑练习 1 中的数列,即

$$c_n=\frac{1}{3^n-1}-\frac{1}{3^{n+1}-1}=\frac{2\times 3^n}{(3^n-1)(3^{n+1}-1)}=\left(\frac{1}{3^n-1}\right)\left(\frac{2\times 3^n}{3^{n+1}-1}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3^n-1}\right)\left(\frac{3^{n+1}}{3^{n+1}-1}\right)$$

所以有 $c_n>\frac{2}{3}a_n$,即有 $a_n<\frac{3}{2}c_n$.所以:$S_n<\frac{3}{2}T_n=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3^{n+1}-1}\right)=\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\frac{1}{3^{n+1}-1}<\frac{3}{4}$

这里利用了练习 1 的结果.

这样利用练习 1 的结果,就把这个数列的放缩问题给巧妙地解决了.事实上,把数列放缩到一个可求和的数列往往是有多种选择,这个不是问题的难点;难就难在需要控制住放缩之后的数列的前 n 项和的上限要小于 3/4.如果只是从数列放缩角度来看,对等比数列 3^n 最常见的放缩形式,则是利用二项式定理展开,可以选用如下形式:

$$3^n=(2+1)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i2^i=(C_n^02^0+C_n^12^1+C_n^22^2+C_n^32^3+\cdots+C_n^n2^n)$$

所以 $a_n=\frac{1}{3^n-1}=\frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{n}C_n^i2^i-1}=\frac{1}{C_n^12^1+C_n^22^2+C_n^32^3+\cdots+C_n^n2^n}<\frac{1}{C_n^12^1+C_n^22^2}=\frac{1}{2n^2}$

这里的分母显然是一个 n 次多项式,符合前面谈到裂项相消法的基本要求;把分母放缩到一个二次多项式,即 $2n^2$.数列 $\frac{1}{n^2}$ 是一个特殊数列,本身没有前 n 项和的求和公式,但是其无穷项和是一个常数,即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}>\frac{3^2}{12}=\frac{3}{4}$.

所以这里可以轻易地使用二项式定理对原数列进行放缩,但是其前 n 项和的上限不容易满足;即使这里增大分母次数,也不容易证明其前 n 项和的上限是小于 3/4.但不管怎么说,裂项相消法的思想在对数列的放缩上还是起了相当大的作用.

函数思想在数列放缩的过程中起着相当大的作用,下面从函数的角度来思考数列的放缩问题.

例 3 在例 2 的条件下,能否找到一个等比数列 c_n,其前 n 项和为 T_n,可以满足 $a_n\leqslant c_n$ 并且有 $T_n<\frac{3}{4}$.

解 不妨设等比数列为 $c_n=c_1q^{n-1}(q>0)$,即需要满足 $a_n=\frac{1}{3^n-1}\leqslant c_1q^{n-1}$,对所有的自然数都成立(但在有些情况下,可以放宽条件只要从某个自然数 K 开始,不等式成立即可).为了简单起见,这里直接可以令 $q=\frac{1}{3}$,即需要满足:$\frac{1}{(3^n-1)}\leqslant\frac{3c_1}{3^n}$,即有 $\frac{3^n}{(3^n-1)}\leqslant 3c_1$ 成立.显然有 $\frac{3^n}{(3^n-1)}=1+\frac{1}{3^n-1}\leqslant\frac{3}{2}$ 成立,所以可以取 $c_1=\frac{1}{2}$,因此可以得到 $c_n=\frac{1}{2}\frac{1}{3^2}$,利用等比数列的求和公式可知,$T_n=\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)<\frac{3}{4}$.

这是构造新数列来对数列进行放缩,对于数列的放缩也可以直接从数列的通项公式入手,即 $a_n=\frac{1}{3^n-1}=\frac{1}{3^n}\times\frac{1}{1-\frac{1}{3^n}}=\frac{1}{3^n}\times g(n)$

其思路是把通项公式 a_n 分解成一个可求和的数列 c_n 与某个有界数列 $g(n)\leqslant M$ 的乘积,即 $a_n=g(n)c_n\leqslant Mc_n$[2].对于本题而言:$c_n=\frac{1}{3^n}$,$g(n)=\frac{3^n}{3^n-1}$.显然 $g(n)\leqslant\frac{3}{2}$,所以有 $a_n\leqslant\frac{1}{3^n}\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\frac{1}{3^{n-1}}$.这与之前的构造是一致的.

从前面的讨论可以知道,通过数列的裂项相消法与函数思想的应用对数列进行放缩还是比较容易的,

难度在于控制放缩之后的精度,即不能放的太大,这样就达不到题目的要求.函数除了在通项公式上可以对数列进行放缩之外,还可以对数列的递推公式进行放缩.

例 4[3] (2015 年浙江高考改编) 设数列 a_n,满足 $a_{n+1}=a_n-a_n^2$,$a_1=\frac{1}{2}$,证明$\frac{1}{2n}\leqslant a_n\leqslant\frac{1}{n+1}$.

证明 本题的递推公式是二次函数$f(x)=x-x^2$,没有办法通过这个递推公式求出数列的通项公式.本题所证明的结论是数列通项的上限与下限,想要直接从递推公式进行放缩变形得到所需结论,其难度是可想而知.必须具备熟练的不等式放缩技巧以及代数式的恒等变形.这些足以让大部分同学望而却步,但是如果换成从函数的角度来看这个问题,可能就是另一个局面.下面就用函数的思想对递推公式进行放缩.

从函数上看,显然有$f(x)=x-x^2<x$,所以有 $a_{n+1}=a_n-a_n^2<a_n$,因此可以得到数列 a_n 是一个递减数列.这里就是利用了函数$g(x)=x$来放大原来的递推公式.得到的结果就是数列是一个递减数列,但这个结果与所需结果相差甚远.也就是说用 $g(x)=x$ 来进行放缩,把递推公式放的太大了.事实上,$f(x)$ 在原点处的切线就是 $g(x)$;所以如果使用直线对$f(x)$ 进行放缩,$g(x)$已经达到最优了;如果还需要进行更加逼近的放缩,则只能考虑一般的曲线了,但是曲线的种类是成千上万的,选择的标准由问题的结论所决定,不能漫无边际的猜测.

现在是要寻找两个函数 $\alpha(x)$,$\beta(x)$ 满足:$\alpha(x)\leqslant f(x)\leqslant\beta(x)$,$x\in(0,\frac{1}{2})$;并且函数作为递推公式 $\alpha(a_n)$,$\beta(a_n)$ 时,是可以求通项公式;不仅如此,从题目证明结论出发,还要求这些递推公式解出的通项公式,从函数角度来看应该是反比例函数类型;就如递推公式 $a_{n+1}=a_n+d$,解出的通项公式是一次函数一样.

这一点,是这种解法的难点.根据平时解题的经验来看,在高中阶段是可以求解线性递推公式,即 $a_{n+1}=\alpha a_n+\beta$,其递推函数为一次函数 $y=\alpha x+\beta$;还有一种在平时练习与考试中经常出现的就是分式递推公式,即 $a_{n+1}=\frac{\alpha a_n}{a_n+\beta}$.这些也是需要平时的积累才行.

若 $a_{n+1}=\frac{aa_n}{a_n+b}$,所以有$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+b}{aa_n}=\frac{b}{a}\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a}$.这里只有当 $a=b$ 时,才能成为等差数列,即$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a}$.可以解出 $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}+(n-1)\frac{1}{a}$,即 $a_n=\frac{1}{\frac{1}{a_1}+(n-1)\frac{1}{a}}$

如果 $a_n=\frac{1}{n+1}$,此时$\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a}=1$并且$\frac{1}{a}=1$,所以 $a=1$,$a_1=\frac{1}{2}$,此时函数为 $y_1=\frac{x}{x+1}$

如果 $a_n=\frac{1}{2n}$,此时$\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a}=0$并且$\frac{1}{a}=2$,所以 $a=\frac{1}{2}$,$a_1=\frac{1}{2}$,此时函数为 $y_2=\frac{x}{2x+1}$

这样 y_1 与 y_2 就是所需的函数.剩下的只需要验证不等式:$\frac{x}{2x+1}\leqslant x-x^2\leqslant\frac{x}{x+1}$是否成立;特别需要强调:这里不需要对所有的 x 都成立,只需要对 $x\in(0,\frac{1}{2})$ 成立即可;通过简单的运算可知,这组不等式是显然成立的.这样就从所需证明的结果中,推出了递推公式的具体表达式.

使用函数的方法对递推公式进行放缩,但由于函数的选择范围太大而无从下手;此时,可以从所需结论出发,推导出递推公式的形式;最后加以简单的证明与验证即可.所用的思想仍是利用函数对递推公式进行放缩.

参考文献:

[1] 黄威.探究四类数列不等式证明题的一般性解决策略[J].中学数学研究:华南师范大学版,2022(19):48-50.

[2] 张中华.一类数列求和型不等式的解决策略与思考[J].上海中学数学,2021(Z2):34-36,65.

[3] 卢明.稳中求变 体现创新 ——2015 年浙江数学高考理科数列试题评析[J].中学教研:数学,2015(08):21-25.

[江苏省苏州市田家炳实验高级中学(215004)]