

点乘双根法解决一类直线与圆锥曲线相交弦问题

胡贵平

(甘肃省白银市第一中学 730900)

摘要: 向量与圆锥曲线交汇的题目,经常利用向量的相等、平行、垂直去寻找坐标之间的数量关系,往往要联立直线方程与圆锥曲线方程,得到一元二次方程,利用根与系数的关系同向量数量关系相结合来求解,而一元二次方程与二次函数有密切的关系,用二次函数的双根式解决向量数量积为定值($\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \lambda$)的问题,可以减少计算量,达到事半功倍的效果.

关键词: 点乘; 双根法; 圆锥曲线; 解题

中图分类号: G632

文献标识码: A

文章编号: 1008-0333(2019)31-0002-03

直线与圆锥曲线的相交弦的问题,常规解法是联立直线方程与圆锥曲线方程,化成关于 x 或 y 的一元二次方程,结合韦达定理来处理的,计算量大,容易出错. 二次函数的双根式 $y = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, 其中 x_1, x_2 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个根,通过双根式来解决解析几何中涉及向量数量积为定值($\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \lambda$)的问题,可以减少计算量,提高解题效率.

例1 (2017 黑龙江哈尔滨师大附中三模) 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$, 过椭圆中心的弦 PQ 满足 $|PQ| = 2, \angle PF_2Q = 90^\circ$, 且 $\triangle PF_2Q$ 的面积为 1.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 直线 l 不经过点 $A(0, 1)$, 且与椭圆交于 M, N 两点, 若以 MN 为直径的圆经过点 A , 求证: 直线 l 过定点, 并求出该定点的坐标.

解 (1) 由对称性易知四边形 PF_1QF_2 为平行四边形, 又 $\angle PF_2Q = 90^\circ$, 所以四边形 PF_1QF_2 为矩形, 所以 $|F_1F_2| = |PQ| = 2$, 所以 $c = 1$. 因为 $S_{\triangle PF_1F_2} = S_{\triangle PF_2Q} = 1$, 所以 $|PF_1| \cdot |PF_2| = 2$, 又 $|PF_1| + |PF_2| = 2a$, $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = (2c)^2 = 4$, 所以 $a^2 = 2$, 所以 $b^2 = 1$, 所求椭圆方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(2) 设直线 l 的方程为 $y = kx + m, M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$. 因为以 MN 为直径的圆经过点 A , 所以 $MA \perp NA$, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{NA} = (0 - x_1)(0 - x_2) + (1 - y_1)(1 - y_2) = 0$. 因为点 M, N 在直线 l 上, 所以 $y_1 = kx_1 + m, y_2 = kx_2 + m$, 所以 $(0 - x_1)(0 - x_2) + (1 - kx_1 - m)(1 - kx_2 - m) = 0$, 所以

$x_1x_2 + k^2(x_1 + \frac{m-1}{k})(x_2 + \frac{m-1}{k}) = 0$. 由 $\begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \\ y = kx + m \end{cases}$, 得 $x^2 + 2(kx + m)^2 - 2 = 0$. 因为 x_1, x_2 是方程 $x^2 + 2(kx + m)^2 - 2 = 0$ 的两个根, 所以 $x^2 + 2(kx + m)^2 - 2 = (1 + 2k^2)(x_1 - x)(x_2 - x)$ (1)

在(1)式中令 $x = -\frac{m-1}{k}$, 得 $\frac{(m-1)^2}{k^2} + 2 - 2 = (1 + 2k^2)(x_1 + \frac{m-1}{k})(x_2 + \frac{m-1}{k})$, 所以 $(x_1 + \frac{m-1}{k})(x_2 + \frac{m-1}{k}) = \frac{(m-1)^2}{k^2(1+2k^2)}$.

在(1)式中令 $x = 0$, 得 $2m^2 - 2 = (1 + 2k^2)(x_1 - 0)(x_2 - 0)$, 所以 $x_1x_2 = \frac{2m^2 - 2}{1 + 2k^2}$.

所以 $x_1x_2 + k^2(x_1 + \frac{m-1}{k})(x_2 + \frac{m-1}{k}) = \frac{2m^2 - 2}{1 + 2k^2} + k^2 \frac{(m-1)^2}{k^2(1+2k^2)} = \frac{2m^2 - 2}{1 + 2k^2} + \frac{(m-1)^2}{1 + 2k^2} = 0$,

即 $3m^2 - 2m - 1 = 0$, 又直线不经过点 $A(0, 1)$, 所以 $m \neq 1$, 所以 $m = -\frac{1}{3}$, 所以直线 l 必过定点 $(0, -\frac{1}{3})$.

例2 (2017 全国新课标 I 文) 设 A, B 为曲线 $C: y = \frac{x^2}{4}$ 上两点, A 与 B 的横坐标之和为 4.

(1) 求直线 AB 的斜率;

(2) 设 M 为曲线 C 上一点, C 在 M 处的切线与直线 AB 平行, 且 $AM \perp BM$, 求直线 AB 的方程.

解 (1) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $x_1 \neq x_2, y_1 = \frac{x_1^2}{4}, y_2 = \frac{x_2^2}{4}$.

收稿日期: 2019-08-05

作者简介: 胡贵平(1978-)男, 甘肃省天水人, 理学学士, 中学一级教师, 从高中数学教学研究.

$=\frac{x_2^2}{4} x_1+x_2=4$, 于是直线 AB 的斜率 $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{x_1+x_2}{4}=1$.

(2) 由 $y=\frac{x^2}{4}$ 得 $y'=\frac{x}{2}$.

设 $M(x_3, y_3)$, 由题设知 $\frac{x_3}{2}=1$, 解得 $x_3=2$, 于是 $M(2, 1)$. 因为 $AM \perp BM$, 所以 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}=0$, $(x_1-2)(x_2-2)+(y_1-1)(y_2-1)=0$.

设直线 AB 的方程为 $y=x+m$, 因为点 A, B 在直线 AB 上, 所以 $y_1=x_1+m, y_2=x_2+m$,

所以 $(x_1-2)(x_2-2)+(x_1+m-1)(x_2+m-1)=0$.

由 $\begin{cases} y=x+m, \\ y=\frac{x^2}{4}, \end{cases}$ 得 $x^2-4x-4m=0$. 由 $\Delta=16(m+1)>$

0 得 $m>-1$.

因为 x_1, x_2 是方程 $x^2-4x-4m=0$ 的两个根, 所以 $x^2-4x-4m=(x_1-x)(x_2-x)$ (1)

在 (1) 式中令 $x=2$, 得 $2^2-4 \times 2-4m=(x_1-2)(x_2-2)$.

在 (1) 式中令 $x=1-m$, 得 $(1-m)^2-4 \times (1-m)-4m=(x_1+m-1)(x_2+m-1)$, 所以

$(x_1-2)(x_2-2)+(x_1+m-1)(x_2+m-1)=2^2-4 \times 2-4m+(1-m)^2-4 \times (1-m)-4m=0$.

解得 $m=-1$ (舍), $m=7$, 所以直线 AB 的方程为 $y=x+7$.

例 3 (2013 天津文、理) 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>$

0) 的左焦点为 F , 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 过点 F 且与 x 轴垂直的直线被椭圆截得的线段长为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 设 A, B 分别为椭圆的左、右顶点, 过点 F 且斜率为 k 的直线与椭圆交于 C, D 两点. 若 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} = 8$, 求 k 的值.

解 (1) 设 $F(-c, 0)$, 由 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, 知 $a=\sqrt{3}c$. 过点 F 且与 x 轴垂直的直线为 $x=-c$, 代入椭圆方程有 $\frac{(-c)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 解得 $y=\pm\frac{\sqrt{6}b}{3}$, 于是 $\frac{2\sqrt{6}b}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$, 解得 $b=\sqrt{2}$. 又 $a^2-c^2=b^2$, 从而 $a=\sqrt{3}, c=1$, 所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$.

(2) 设点 $C(x_1, y_1), D(x_2, y_2)$, 由 $F(-1, 0)$ 得直线 CD 的方程为 $y=k(x+1)$, 由方程组 $\begin{cases} y=k(x+1), \\ \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1, \end{cases}$ 得 $2x^2$

$+3k^2(x+1)^2-6=0$.

因为 x_1, x_2 是方程 $2x^2+3k^2(x+1)^2-6=0$ 的两个根,

所以 $2x^2+3k^2(x+1)^2-6=(2+3k^2)(x_1-x)(x_2-x)$. (1)

因为 $A(-\sqrt{3}, 0), B(\sqrt{3}, 0)$,

所以 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} = (x_1+\sqrt{3}, y_1)(\sqrt{3}-x_2, -y_2) + (x_2+\sqrt{3}, y_2)(\sqrt{3}-x_1, -y_1) = 6-2x_1x_2-2y_1y_2 = 6-2x_1x_2-2k^2(x_1+1)(x_2+1)$.

在 (1) 式中令 $x=0$, 得 $3k^2-6=(2+3k^2)x_1x_2$, 所以 $x_1x_2=\frac{3k^2-6}{2+3k^2}$.

在 (1) 式中令 $x=-1$, 得 $2-6=(2+3k^2)(x_1+1)(x_2+1)$, 所以 $(x_1+1)(x_2+1)=\frac{-4}{2+3k^2}$.

所以 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} = 6-2x_1x_2-2k^2(x_1+1)(x_2+1) = 6-\frac{6k^2-12}{2+3k^2}+\frac{8k^2}{2+3k^2} = 6+\frac{2k^2+12}{2+3k^2}$.

由已知得 $6+\frac{2k^2+12}{2+3k^2}=8$, 解得 $k=\pm\sqrt{2}$.

例 4 (2012 重庆理) 设椭圆中心在原点 O , 长轴在 x 轴上, 上顶点为 A , 左右焦点分别为 F_1, F_2 , 线段 OF_1, OF_2 中点分别为 B_1, B_2 , 且 $\triangle AB_1B_2$ 是面积为 4 的直角三角形.

(1) 求该椭圆的离心率和标准方程;

(2) 过 B_1 作直线 l 交椭圆于 P, Q 两点, 使 $PB_2 \perp QB_2$, 求直线 l 的方程.

解 (1) 设所求椭圆的标

准方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$, 右焦点为 $F_2(c, 0)$.

因 $\triangle AB_1B_2$ 是直角三角形, 又 $|AB_1|=|AB_2|$, 故 $\angle B_1AB_2$ 为直角, 因此 $|OA|=|OB_2|$, 得 $b=\frac{c}{2}$.

结合 $c^2=a^2-b^2$ 得 $4b^2=a^2-b^2$, 故 $a^2=5b^2, c^2=4b^2$, 所以离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{5}\sqrt{5}$.

在 $\text{Rt}\triangle AB_1B_2$ 中, $OA \perp B_1B_2$, 故 $S_{\triangle AB_1B_2}=\frac{1}{2}|B_1B_2| \cdot |OA|=|OB_2| \cdot |OA|=\frac{c}{2} \cdot b=b^2$.

由题设条件 $S_{\triangle AB_1B_2}=4$, 得 $b^2=4$, 从而 $a^2=5b^2=20$.

因此, 所求椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2) 易知直线 l 不与轴垂直, 则设直线 l 方程为 $y=k(x+2)$, $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$.

因为 $PB_2 \perp QB_2$, 则 $\overrightarrow{PB_2} \cdot \overrightarrow{QB_2}=0$, 所以 $(x_1-2, y_1)(x_2-2, y_2)=0$, 即 $(x_1-2)(x_2-2)+k^2(x_1+2)(x_2+2)=0$.

$$\text{联立} \begin{cases} y = k(x+2), \\ \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1, \end{cases} \text{消去 } y, \text{得 } x^2 + 5k^2(x+2)^2 - 20 = 0$$

0. 因为 x_1, x_2 是方程 $x^2 + 5k^2(x+2)^2 - 20 = 0$ 的两个根, 所以 $x^2 + 5k^2(x+2)^2 - 20 = (1+5k^2)(x_1-x)(x_2-x)$. (1)

在 (1) 式中令 $x=2$, 得 $4+80k^2-20=(1+5k^2)(x_1-$

$$2)(x_2-2), \text{所以 } (x_1-2)(x_2-2) = \frac{80k^2-16}{1+5k^2}.$$

在 (1) 式中令 $x=-2$, 得 $4+0-20=(1+5k^2)(x_1+$

$$2)(x_2+2), \text{所以 } (x_1+2)(x_2+2) = \frac{-16}{1+5k^2}.$$

结合 $(x_1-2)(x_2-2) + k^2(x_1+2)(x_2+2) = 0$, 化简

$$\text{可得 } \frac{80k^2-16}{1+5k^2} + \frac{-16}{1+5k^2} = 0.$$

所以 $80k^2 - 16k^2 - 16 = 0$, 即 $k^2 = \frac{1}{4}$, 所以 $k = \pm \frac{1}{2}$.

所以直线 l 方程为 $y = \pm \frac{1}{2}(x+2)$.

参考文献:

[1] 蓝云波. 双根法是优化解析几何运算的又一利器 [J]. 中学数学杂志 2015(09): 30-32.

[2] 梁红. 2014-2018 全国卷五年高考真题 [M]. 西安: 陕西科学技术出版社 2018(6): 9-13.

[责任编辑: 杨惠民]

“ $a\sin x + b\cos x = c$ ”型导数法求解对吗

叶文明 叶丽英

(浙江省松阳二中 323406)

摘要: 本文就高考中常出现的一类三角函数型求值题, 进行了多方位的探究求解, 并剖析了用导数法求解时易出现的错误.

关键词: 三角函数; 求值; 平方; 导数法

中图分类号: G632

文献标识码: A

文章编号: 1008-0333(2019)31-0004-02

前段时间, 一个学生拿了两个题目问我(例 1: 已知 $3\sin x + 4\cos x = 5$, 求 $\tan x$. 例 2: 已知 $4\sin x - 3\cos x = 2$, 求 $\tan x$). 他说“老师, 这两道题除了其他一些方法外, 你曾经介绍过导数法, 但我用这种方法去做, 例 2 却跟书上答案不一致, 这到底是什么原因?”

三角函数是函数的一个特例, 解三角函数问题, 一般的思路是通过恒等变形, 利用三角函数的性质求解. 由于导数是研究函数性质的一种强有力工具, 所以解决三角函数问题时, 若能注意题目的特点, 利用导数处理相关问题, 不仅可以突破难点, 开拓思路, 提高解题效率, 而且简单易懂, 便于掌握.

上述两题可在教材中找到它的原型:

例 3 (人教版必修四 P₆₉ 复习参考题 A 组第 5 题) 已知 $\sin x = 2\cos x$, 求角 x 的三个三角函数值.

例 4 (人教版必修四 P₁₄₇ 复习参考题 B 组第 8 题)

已知 $\sin \beta + \cos \beta = \frac{1}{5}$, $\beta \in (0, \pi)$, 求 $\tan \beta$ 的值. 你能根据所给的条件, 自己构造出一些求值问题吗?

例 5 (2008 年浙江卷) 已知 $2\sin \alpha + \cos \alpha = -\sqrt{5}$, 则 $\tan \alpha =$ _____.

$$\text{解法 1 联立方程组} \begin{cases} 2\sin \alpha + \cos \alpha = -\sqrt{5}, \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \end{cases}$$

消元得 $(\sqrt{5}\sin \alpha + 2)^2 = 0$, 解得 $\sin \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, 从而 $\cos \alpha$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}}. \text{故 } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2.$$

解法 2 由 $2\sin \alpha + \cos \alpha = -\sqrt{5}$ 平方得

$$4\sin^2 \alpha + 4\sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 5\sin^2 \alpha + 5\cos^2 \alpha,$$

$$\text{即 } \sin^2 \alpha - 4\sin \alpha \cos \alpha + 4\cos^2 \alpha = 0,$$

$$\therefore (\sin \alpha - 2\cos \alpha)^2 = 0.$$

收稿日期: 2019-08-05

作者简介: 叶文明(1967-), 男, 中学高级教师, 从事高中数学教育研究.

叶丽英(1976-), 女, 中学一级教师, 从事高中数学教育研究.