

# “问题导思”促进学生知识的内化

## ——高三数学《等差、比数列》知识点复习的实践与思考

吴 彤

(江苏省盐城市教育局教科院 224000)

高三数学复习,特别是一轮复习,需要全面系统复习各章各节的知识点,不仅要让学生知其然,更要让学生知其所以然,从而让学生构建知识框架,加强知识间的关联性理解,达到知识的内化.所有教师都重视知识点复习,然而复习效果却不尽相同,我们常听一些老师对学生说,复习知识点你又不听讲,做到题目又不会.其实,这些知识点学生不是都不会用,基本问题,学生能够套用公式、定理等完成;较难一点的问题,他们有时确实不会,但原因较多,有思维方法的原因,也有知识点理解不深的原因.所以,这些知识点,学生是懂而不透,常规平铺直叙的评讲,学生厌烦,他们认为会了,不想听;有老师为了减少学生的厌烦感,他们在题目的评讲中,逐步梳理出知识点,但知识零碎,缺乏知识间的关联性理解;还有个别老师要求学生默写,学生是敢怒不敢言,这种复习方法最不可取.

怎样进行知识点复习,才能让学生愿意听讲,切实提高复习效率呢?这是我们每位数学教师都应思考的问题.本文将结合《等差、比数列》的知识点复习,与读者交流复习方法,以期抛砖引玉.

### 1 复习方法探讨

要想让学生愿意跟在老师后面复习知识点,你得让他们思考,思考与知识相关的内涵问题,即问题导思.要让他们知道,本以为懂了的知识,其实理解不深!同时,如果教师提出的问题比较新颖,那么学生就更愿意听讲,主动思考了.比如,举个司空见惯的运算,但很多学生就不能解释其原因,为什么 $(\sqrt{2})^2=2$ ?初中教师可以用这个问题复习平方根的概念,因为 $x^2=2$ ,所以 $x$ 为2的平方根,即 $x=\pm\sqrt{2}$ ,其中 $x=\sqrt{2}$ 是2的算术平方

根,所以 $x^2=(\pm\sqrt{2})^2=2$ ,所以 $(\sqrt{2})^2=2$ ;而高中教师可用此复习分数指数幂的运算公式,因为 $\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$ ,所以 $(\sqrt{2})^2=(2^{\frac{1}{2}})^2=2^{\frac{1}{2}\cdot 2}=2$ .

等差数列与等比数列的概念、相关性质、求和公式对应关系非常强,可一并复习,通过类比分析,学生印象可能会更深刻.对等差数列的相关知识的复习,本文将通过问题引导学生思考,或思考其成因,或思考其应用注意点,或思考其关联性等等,在保证问题有内涵的基础上,力争做到问题的新颖,以扣住学生思考.以下具体的课堂实践,供读者教学中参考、研讨.

### 2 课堂问题设计

问题 1 如何证明一个数列是等差数列?

问题 1 不仅帮助学生复习了等差数列的定义,同时还帮助学生归纳了一类问题的证明方法,有一箭双雕的作用.学生通过思考,可归纳出证明方法:(1)定义法,即证明 $a_n - a_{n-1} = d$ (常数);(2)中项法,即证明 $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$ .当然,对等差数列定义的注意点以及中项法的内涵,还要再探讨,于是追问:

问题 1-1 你认为等差数列的定义有哪些注意点?

让学生思考定义的注意点,比让学生回忆定义,效果也许更好.此问题,要求学生分析出两个注意点:(1)从第二项起,即 $a_n - a_{n-1} = d (n \geq 2)$ ;(2)差 $d$ 为常数,即公差.

问题 1-2 为什么用中项法,证明到 $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$ ,就说明是等差数列呢?

中项法证明等差数列是学生都熟悉的方法,但这个递推关系式,他们未必都知其所以然.数列的很多性质,往往就体现在递推关系式上,然而很

多学生对“由变量  $n$  的任意性而产生的传递性”，理解不深. 上述递推关系，等价于对  $\forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*$ ，都有  $a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}$  成立，即  $a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1} = \cdots = a_2 - a_1$ ，满足等差数列的定义.

问题 2 怎样证明等差数列的通项公式  $a_n = a_1 + (n-1)d$ ?

等差数列通项公式的记忆显然不是问题，它的证明方法（叠加法）却很重，需要学生通过分析，加深理解其内涵. 由等差数列的定义，有  $a_n - a_{n-1} = d$ （常数），通过叠加法，得  $(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) = (n-1)d$ ，对这个式子，学生容易忽视  $n \geq 2$ ，需要教师提醒证明的严密性，整理得  $a_n = a_1 + (n-1)d (n \geq 2)$ ，又当  $n=1$  时， $a_n = a_1$  成立，所以等差数列的通项公式  $a_n = a_1 + (n-1)d$  成立.

问题 2-1 除了等差数列，你能不能举一个用叠加法求通项公式的例子呢？

这是个发散性问题，对学生理解叠加法，非常有帮助！数列递推关系，若具备后一项减前一项，且差  $f(n)$  能求和，则能用叠加法求通项公式. 如  $a_n - a_{n-1} = n$  或  $\frac{1}{(n-1)n}$  等，再给出首项  $a_1$  的值，则由叠加法可求  $a_n$ .

问题 2-2 在等差数列中，公式  $a_n = a_m + (n-m)d$  与通项公式有什么关系？

该问题主要目的是让学生深化理解等差数列的通项公式，当  $m=1$  时即通项公式，它与通项公式是一般与特殊的关系. 然后，要求学生完成课本题：在等差数列  $\{a_n\}$  中，若  $a_p = q, a_q = p (p \neq q)$ ，求  $a_{p+q}$ .（见文[1]）学生既可以运用通项公式，求出基本量  $a_1$  与  $d$ ；还可以用通项公式的一般情形求解：不妨设  $q > p$ ，则  $a_q = a_p + (q-p)d$ ，将条件代入，得  $d = -1$ ，所以  $a_{p+q} = a_p + qd = q + q(-1) = 0$ .

问题 3 在等差数列中， $a_2 + a_8 = a_{10}$  是否成立？为什么？

问题 3 的目的，是复习等差数列的性质“下标和相等，和相等”. 即若  $m+n=p+q$ ，则  $a_m + a_n = a_p + a_q$ .”的运用注意点. 学生通常会答不成立，在教师的追问下，他们会指出上述性质，并说明  $a_2 + a_8 = a_{10}$  不满足性质“等式左右两边都是两项相加”. 当然，教师要从严密性的角度解释问题 3，在

通常情形下， $a_2 + a_8 = a_{10}$  不成立，但对特定的等差数列， $a_2 + a_8 = a_{10}$  也可能成立，由  $a_2 + a_8 = 2a_1 + 8d = a_{10} = a_1 + 9d$ ，即当  $a_1 = d$  时， $a_2 + a_8 = a_{10}$  成立. 教师继续追问，上述性质怎样证明呢？学生自然知道用等差数列的通项公式代入证明，这时教师可再结合证明过程，说明性质运用的注意点，由等差数列的通项公式，得  $a_m + a_n = 2a_1 + (m+n-2)d$  与  $a_p + a_q = 2a_1 + (p+q-2)d$ ，等式两边都是 2 倍  $a_1$  且  $d$  的系数相等，要产生 2 倍  $a_1$ ，等式两边都应是两项.

问题 3-1 能否根据等差数列的性质“下标和相等，和相等”的注意点分析，将它拓展引申？

有了上述分析，学生不难回答问题 3-1，“下标和相等”的前提是等式左右两边的项数要相同. 比如，等式两边都是 3 项，即有结论：在等差数列  $\{a_n\}$  中，若  $m+n+l=p+q+r$ ，则  $a_m + a_n + a_l = a_p + a_q + a_r$ .

问题 4 为什么能用倒序相加法推导等差数列的前  $n$  项和公式？

学生知道等差数列的前  $n$  项和公式的推导方法，但理解是否深刻？却难说. 故用问题 4 促进学生对倒序相加法的理解. 为什么能用倒序相加？因为等差数列有性质“下标和相等，和相等”，即  $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \cdots = a_n + a_1$ ，所以运用倒序相加法求和，可得  $2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_n + a_1) = n(a_1 + a_n)$ . 这样，学生不仅掌握推导方法，对方法的来龙去脉理解也更深刻.

问题 4-1 是不是只有等差数列的求和公式，才能用倒序相加法推导？

如果只到问题 4 结束，将来可能会有不少学生认为，倒序相加法就是等差数列求和公式推导的专用方法，需要通过问题 4-1 帮助学生厘清这里的逻辑关系，需要让他们回顾思考用倒序相加法求和的其他问题. 事实上，前面复习函数时有例子：已知函数  $f(x) = \frac{1}{2^x + \sqrt{2}}$ ，则  $f(-2015) + \cdots + f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(2016) = \underline{\hspace{2cm}}$ . 能用倒序相加的原因是  $f(x) + f(1-x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . 另外，高二排列组合一章中也有例子： $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \cdots + nC_n^n$ ，这也能用倒序相

加法求和,因为组合数前面的系数是等差数列,且组合数有性质  $C_n^m = C_n^{n-m}$ ,倒序后对应相等.

问题 4-2 给定等差数列的首项  $a_1$  与公差  $d$ ,等差数列随之确定,其前  $n$  项和  $S_n$  取决于项数  $n$ ,那么  $S_n$  是关于  $n$  的什么函数呢?

学生若记得公式,则能直接解释该问题,若公式不熟练,则要对公式  $S_n = \frac{1}{2}(a_1 + a_n)n$  进行演变.将  $a_n = a_1 + (n-1)d$  代入,首先得到课本公式  $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$ ,教师解读该公式的运用,只要给出等差数列的首项  $a_1$ 、公差  $d$  以及项数  $n$ ,就能求前  $n$  项和  $S_n$ ,继续演变,又得到函数特征很明显的公式  $S_n = \frac{d}{2}n^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n$ .由此,学生能迅速回答上述问题,当  $d=0$  时,  $S_n$  是关于  $n$  的一次函数;当  $d \neq 0$  时,  $S_n$  是关于  $n$  的二次函数,且无论什么情况,函数的图象总过原点.

问题 5 等差数列与等比数列有很多相似之处,由等差数列的性质,能类比到等比数列的哪些性质呢?

让学生通过类比,反馈等比数列的相关性质,有助于学生的理解记忆.与上文对应,像等比数列的证明方法、等比数列的通项公式、等比数列的性质“下标和相等,积相等”,都可由类比得到.当然,教师对等比数列的部分性质,还要再与学生再解读,提醒学生等比数列证明的严密性,如得到  $a_n = 3a_{n-1}$ ,要强调  $a_1 \neq 0$ ;若证明到  $a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1}$ ,要强调  $a_n \neq 0$ .以及叠乘法的再认识等等.

问题 5-1 等比数列的哪些性质不能由等差数列类比得到呢?

学生自然想到,等比数列的求和公式及推导方法不能通过类比得到,需要用错位相减法推导公式.将和式乘以公比并向右错一位,这时除首、尾两项外,各项对应相等,相减后,得  $(1-q)S_n = 1 - q^n$ .然后,讨论  $q$  与 1 的关系,即得到求和公式,教师再解读公式运用的注意点.

最后,教师追问,什么类型的数列也能用错位相减法求和?学生很快就能答出,“等差 $\times$ 等比”型数列.继续追问,为什么呢?让学生思考错位相减法的内涵:和式乘以公比并向右错一位后,除首、尾两项外,各项公比的指数对应相等,相减后

提取指数式,系数为等差数列的后一项减前一项,即公差,能够化简求和.然后,教师再举一个简单的例子,让学生操作体验一下这个基本方法.

问题 5-2 在等差数列  $\{a_n\}$  中,  $S_n$  为其前  $n$  项和,则数列  $S_3, S_6 - S_3, S_9 - S_6, \dots$  是等差数列.试证明上述结论,并通过类比,找出等比数列的相关结论.

由于距离数列新授课时间较长,不少学生已遗忘等差、比数列前  $n$  项和  $S_n$  的差的性质,故而直接给出结论,要求学生证明,再由证明方法的类比,自然得到等比数列的类似性质,这样的证明比较,学生印象会更深刻.容易发现上述数列的通项为  $S_{3n} - S_{3n-3}$ ,由  $(S_{3n+3} - S_{3n}) - (S_{3n} - S_{3n-3}) = (a_{3n+1} + a_{3n+2} + a_{3n+3}) - (a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n}) = 9d$ ;若是等比数列,则  $\frac{S_{3n+3} - S_{3n}}{S_{3n} - S_{3n-3}} =$

$\frac{a_{3n+1} + a_{3n+2} + a_{3n+3}}{a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n}} = q^3$ ,所以在等比数列  $\{a_n\}$  中,  $S_n$  为其前  $n$  项和,则数列  $S_3, S_6 - S_3, S_9 - S_6, \dots$  是等比数列.然后,教师指出上述等比数列证明的不足,应说明  $S_3 = a_1(1+q+q^2) \neq 0$ ,若是  $S_2$ ,则  $S_2 = a_1(1+q)$  可为 0,提醒学生归纳结论要留意严密性.最后,让学生归纳出一般性结论.

### 3 两点教学反思

通过《等差、比数列》知识点复习的教学设计,笔者对高三数学复习有两点想法,与读者交流.

(1)让课堂慢下来,多让学生内化.高三数学复习,学生有着做不完的练习,有太多不会做的题目,这些学生不会做的题目,催生了高三教学的快节奏,教师不停地讲,学生拼命地听,到头来还是错!依笔者看,学生不会做的题目未必要面面俱到地讲,倒不如选讲少量的经典题目,让课堂节奏彻底慢下来,上探究课,引导学生思考!思考知识方法的内涵,真正地让学生学懂数学,让学生学会分析问题,学会找解决问题的方法.就如本文,不惜时间探讨等差、比数列的相关知识点,充分让学生内化这些知识,虽然少讲了一些题目,但学生的理解深刻了,对他们解决具体的数列问题,肯定有帮助.

(2)合理设计问题,引导学生思考.教师所提的问题,是学生思考的方向,问题的质量,影响课堂的教学效率.笔者认为问题的设计要注意以下

几点:一是方向性要强,既然是引导学生思考,就要让学生有思考的方向,不能让学生摸不着头脑,无所适从.当然,我们所讲的方向性强的问题,不是指收敛性问题,它完全可以是指发散性问题,可以有多种解释、有多种思路方法;二是深入性要强,这里所讲的深入性,不是指难度大的问题,它是指学生通过思考,所得到的答案,要触及知识方法的内涵,要能揭示问题的本质,真正让学生有所悟,促进学生的理解;三是新颖性要强,学生每天都听同一个老师的数学课,容易审美疲劳,我们所提的问题要能调动学生的积极性,问题不能套路化,要

尽量变着花样设计问题,才能吸引学生思考.

此外,我们所设计的问题,还要控制好难易度,太简单学生都会的问题,思考什么?没有价值!太难学生都不会的问题,容易挫伤学生的积极性.我们要提那些让学生跳一跳能够到的问题,跳一跳即必须要有思考,能够到即有一定数量的学生能解决.

#### 参考文献

- [1] 单增主编. 苏教版普通高中课程标准实验教科书(数学必修5)[M]. 南京:江苏教育出版社,2012

(上接第 21 页)

满;有的学生付出了很多,却没有成绩,有很多怨恨.因此,在数学教学中,教师要想方设法让学生享受到学习过程的乐趣,同时教师也享受到课堂教学的成就感与幸福感.

案例 4 (苏教版必修 1-1 习题改编)在  $\triangle ABC$  中,  $B(-3,0), C(3,0)$ , 点  $A$  在椭圆  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 (x \neq \pm 3)$  上, 则直线  $AB, AC$  斜率乘积为

$$\text{生: } k_{AB} \cdot k_{AC} = -\frac{4}{9}.$$

师:  $-\frac{4}{9} = -\frac{b^2}{a^2}$  是必然还是巧合? 试探究一般性的结论.

探究 1 一般地, 对于椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ,  $A, B$  是其左、右顶点,  $P$  是  $C$  上异于点  $A, B$  的动点, 则直线  $PA$  与  $PB$  的斜率乘积为定值  $e^2 - 1$ .

师:“椭圆”改为“双曲线”呢? “ $A, B$  是左、右顶点”改为“ $A, B$  是曲线上关于原点对称的两点”, 结论是否成立呢? (教师放手让学生去探究)

探究 2 一般地, 对于双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ ,  $A, B$  是其左、右顶点,  $P$  是  $C$  上异于点  $A, B$  的动点, 则直线  $PA$  与  $PB$  的斜率乘积为定值  $e^2 - 1$ .

探究 3 不论是椭圆还是双曲线, 只要曲线上  $A, B$  两点关于原点对称,  $P$  是曲线  $C$  上异于点  $A, B$  的动点, 那么  $k_{PA} \cdot k_{PB} = e^2 - 1$ .

【评析】苏霍姆林斯基说过:“在人的心灵深处, 都有一种根深蒂固的需要, 这就是希望感到自己是一个发现者、研究者、探索者, 而在儿童的精神世界里这种需要特别强烈.” 为此, 教师要根据学生实际创设真实的、多元的、有效的问题, 驱使学生去尝试、去探究, 把学生推到主动位置, 放手让学生自己学习, 这样就可以使探究课堂教学进入理想的境界. 研究者正是从这一点出发, 没有让学生被动的接受学习, 而是真正把学生当作探究者, 满足了学生的心理需要, 让学生的学习活动成为探究活动, 让学生明白: 知识的获得就是一个不断探究的过程, 还有许多知识等待我们去研究、去发现. 只要认真探究, 就会有发现有收获, 就会体验到学习成功的快乐.

总之, 基础教育课程改革是一项庞大复杂的系统工程, 是螺旋上升与发展的过程. 走在基础教育课程改革的大道, 数学教育的前途是光明的, 但道路是曲折的, 存在问题并不可怕, 可怕的是没有觉醒和麻木, 只要我们面对问题与困难积极寻找解决问题的方法与策略, 以实际行动去克服弥补不足, 中国的数学教育改革必然迎来美好的明天, 笔者也愿为促进数学教育的改革而不懈努力.

#### 参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部制订. 普通高中数学课程标准(实验)[S]. 北京:人民教育出版社,2003  
[2] (美)卡尔·B. 博耶, 尤塔·C. 梅兹巴赫 著. 数学史(上、下)[M]. 秦传安, 译. 北京:中央编译出版社,2012,5  
[3] 董荣森. 让探究成为数学课堂教学的常态[J]. 数学通报, 2014(2)