例析数列不等式放缩的处理途径

白亚军

（甘肃省永昌县第一高级中学，甘肃 金昌 737200）

摘　要：数列不等式为高中数学的重点和难点，常出现在高考压轴题中，具有极高的思想性和技巧性．解决数列不等式的一般思想是进行合理的放缩，放缩后能够再运算是解决此类问题的重要原则．

关键词：数列不等式；积分放缩；函数放缩

中图分类号：G632　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1008－0333(2023)31－0074－03

熟记一些常见的放缩结论，掌握一些常见的放缩技巧很重要．在放缩过程中经常用到的方法有：积分（函数法）放缩、裂项放缩、对偶放缩、分类放缩、二项式定理放缩、等比放缩等．

1 积分放缩

例1　求证：$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$．

证明　因为$\frac{1}{n}<\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x}dx=\ln n-\ln(n-1)$，

所以$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}<\int_{1}^{2}\frac{1}{x}dx+\int_{2}^{3}\frac{1}{x}dx+\cdots+\int_{n}^{n+1}\frac{1}{x}dx=\int_{1}^{n+1}\frac{1}{x}dx=\ln(n+1)$．

因为$\frac{1}{n}>\int_{n}^{n+1}\frac{1}{x}dx=\ln(n+1)-\ln n$，

所以$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\int_{1}^{2}\frac{1}{x}dx+\int_{2}^{3}\frac{1}{x}dx+\cdots+\int_{n}^{n+1}\frac{1}{x}dx=\int_{1}^{n+1}\frac{1}{x}dx=\ln(n+1)$．

评注　积分法即利用积分的几何意义进行放缩．记住基本结论：$\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}<\ln\frac{n}{n-1}$[1]．

2 函数放缩

例2　求证：$\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{3}+\cdots+\frac{\ln 3^n}{3^n}<3^n-\frac{5n+6}{6}$．

证明　由 $\ln x\leqslant x-1$，得$\frac{\ln x}{x}\leqslant 1-\frac{1}{x}$．

所以$\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{3}+\cdots+\frac{\ln 3^n}{3^n}<1-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{3}+\cdots+1-\frac{1}{3^n}=3^n-1-(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^n})$．

故需证$3^n-1-(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^n})\leqslant 3^n-1-\frac{5n}{6}$．

即证$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^n}\geqslant\frac{5n}{6}$．

因为$\frac{1}{n}>\int_{n}^{n+1}\frac{1}{x}dx=\ln(n+1)-\ln n$，

收稿日期：2023－08－05

作者简介：白亚军（1978－），男，甘肃省永昌人，本科，中学高级教师，从事高中数学教学研究．

所以$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^n}>\int_2^3\frac{1}{x}dx+\int_3^4\frac{1}{x}dx+\cdots+\int_{3^n}^{3^n+1}\frac{1}{x}dx=\int_2^{3^n+1}\frac{1}{x}dx=\ln(3^n+1)-\ln2>\ln3^n-\ln2=n\ln3-\ln2>\frac{5n}{6}(n\geqslant3)$,当 $n=1,2$ 时验证成立,

所以$\frac{\ln2}{2}+\frac{\ln3}{3}+\cdots+\frac{\ln3^n}{3^n}<3^n-\frac{5n+6}{6}$.

评注 函数法即构造函数,利用函数单调性进行放缩. 记住基本结论:$\ln x\leqslant x-1\Leftrightarrow\ln(1+x)\leqslant x$.

3 对偶放缩

例 3 求证:$(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{4})\cdots(1-\frac{1}{2n})<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

证明 令 $S=(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{4})\cdots(1-\frac{1}{2n})=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n}$, ①

要证$(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{4})\cdots(1-\frac{1}{2n})<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$,

即证 $S=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

即证 $S<\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\cdots\times\frac{2n}{2n+1}$. ②

①×②,得 $S^2<\frac{1\times2\times3\cdots(2n)}{2\times3\times4\cdots(2n+1)}=\frac{1}{2n+1}$.

所以 $S<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

评注 利用糖水不等式$\frac{b}{a}<\frac{b+m}{a+m}(a>b>0,m>0)$或$\frac{b}{a}>\frac{b+m}{a+m}(b>a>0,m>0)$证明.

4 裂项放缩

4.1 分母整式型裂项

例 4 求证:$\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^3}<\frac{1}{4}$.

证明 因为$\frac{1}{k^3}<\frac{1}{k^3-k}=\frac{1}{(k-1)k(k+1)}=\frac{1}{2}[\frac{1}{(k-1)k}-\frac{1}{k(k+1)}]$,

所以$\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^3}<\frac{1}{2}[\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}]+\frac{1}{2}[\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4}]+\cdots+\frac{1}{2}[\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{n(n+1)}]=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)n}]<\frac{1}{4}$.

评注 基本结论:①$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$;

②$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n^2-1/4}=\frac{4}{4n^2-1}=2(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$;

③$\frac{1}{n^3}<\frac{1}{2}[\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}]$.

4.2 分母根式型裂项

例 5 求证:$\frac{1}{\sqrt{1^3}}+\frac{1}{\sqrt{2^3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^3}}<3$.

证明 因为$\frac{1}{\sqrt{k^3}}=\frac{2}{k\sqrt{k}+k\sqrt{k}}$

$<\frac{2}{\sqrt{k}\sqrt{k-1}(\sqrt{k}+\sqrt{k-1})}=2(\frac{1}{\sqrt{k-1}}-\frac{1}{\sqrt{k}})$,

所以$\frac{1}{\sqrt{1^3}}+\frac{1}{\sqrt{2^3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^3}}<1+2(1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}})=3-\frac{2}{\sqrt{n}}<3$.

评注 基本结论:①$2(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}})<\frac{1}{\sqrt{k^3}}=\frac{1}{k\sqrt{k}}<2(\frac{1}{\sqrt{k-1}}-\frac{1}{\sqrt{k}})$,②$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}}<2(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}})$.

5 等比放缩

例 6 求证:$\frac{1}{3+1}+\frac{1}{3\times2+1}+\cdots+\frac{1}{3\times2^{n-1}+1}<\frac{4}{7}$.

证明 因为$\frac{1}{3+1}+\frac{1}{3\times2+1}+\cdots+\frac{1}{3\times2^{n-1}+1}<\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{3\times2^2}+\frac{1}{3\times2^3}+\cdots+\frac{1}{3\times2^{n-1}}=\frac{11}{28}+\frac{1}{3}\cdot$

$\frac{(1-1/2^{n-2})/2^2}{1-1/2}<\frac{11}{28}+\frac{1}{6}=\frac{47}{84}<\frac{48}{84}=\frac{4}{7}$.

6 分类放缩

例7 已知数列$\{a_n\}$中,$a_n=\frac{1}{n(n+2)}$,求证:$a_1+a_2+\cdots+a_n<\frac{3}{4}$.

证明 因为$a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{4\times6}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}$,

当n为偶数时,不妨设$n=2k,k\in\mathbf{N}^*$,则

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{4\times6}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{2k(2k+2)}$$

$$=\left[\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}\right]+\left[\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{4\times6}+\cdots+\frac{1}{2k(2k+2)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2k+1})+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{2k+2})>\frac{3}{4}.$$

当n为奇数时,不妨设$n=2k+1,k\in\mathbf{N}^*$,同理可证.

7 二项式定理放缩

例8 求证:$2\leqslant(1+\frac{1}{n})^n<3$.

证明 因为$(1+\frac{1}{n})^n=1+C_n^1\frac{1}{n}+C_n^2(\frac{1}{n})^2+\cdots=1+1+C_n^2\frac{1}{n^2}\geqslant2$,又$(1+\frac{1}{n})^n=1+C_n^1\frac{1}{n}+C_n^2(\frac{1}{n})^2+\cdots+C_n^n(\frac{1}{n})^n$,

则$C_n^k(\frac{1}{n})^k=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}(\frac{1}{n})^k$

$$=\frac{1}{k!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{n-k+1}{n}<\frac{1}{k!}\leqslant\frac{1}{2^{k-1}}.$$

所以$(1+\frac{1}{n})^n<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{1-1/2^n}{1-1/2}<1+2=3$.

评注 基本结论:①$2^n>2n+1(n\geqslant3)$;②$2^n>n^2+n+2(n\geqslant5)$;③$3^n\geqslant2n^2+1(n\geqslant2)$.

8 利用已证结论放缩

例9 已知函数$f(x)=e^x-(x+1)\ln(x+1)-1$.

(1)当$x>0$时,证明:$f(x)>0$;

(2)已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{ne^{\frac{1}{n}}-n}{n+1}$,证明:$a_1+a_2+\cdots+a_n>\ln(n+1)$.

解析 (1)由题意得$f'(x)=e^x-\ln(x+1)-1$,

设$g(x)=e^x-\ln(x+1)-1$,则

$$g'(x)=e^x-\frac{1}{x+1}=\frac{e^x(x+1)-1}{x+1}.$$

当$x>0$时,$e^x>1,x+1>1$,则$e^x(x+1)>1$.

从而$g'(x)>0$.所以$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.故$g(x)>g(0)=0$.即$f'(x)>0$.所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

所以当$x>0$时,$f(x)>f(0)=0$,即$f(x)>0$.

(2)由(1)知:当$x>0$时,

$f(x)=e^x-(x+1)\ln(x+1)-1>0$,

即$\frac{e^x-1}{x+1}>\ln(x+1)$.

令$x=\frac{1}{n}$,则$\frac{ne^{\frac{1}{n}}-n}{n+1}>\ln\frac{n+1}{n}$.

所以$a_1+a_2+\cdots+a_n>\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}=\ln(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\cdots\times\frac{n+1}{n})=\ln(n+1)$.

所以$a_1+a_2+\cdots+a_n>\ln(n+1)$.

参考文献:

[1] 程伟.数列求和与不等式放缩问题的解题策略[J].高中数学教与学,2022(23):16-18.

[责任编辑:李 璟]