

问题引导·模型建构·破题有术

——以高三数列微专题复习课“数列求和放缩问题”为例

顾予恒

(浙江省杭州第二中学钱江学校)

摘要:以数列和式放缩为主题,引导学生经历“有通项有和—有通项无和—无通项无和”的研究之旅,逐步探寻一类“类等比数列”的放缩问题.总结三种常见的基本模型和解决步骤,让破解数列和式不等式有规律可循,真正实现放缩有术,有效提升学生的数学运算、逻辑推理和数学抽象素养.

关键词:高三复习;数列求和;放缩

一、问题提出

在新高考背景下,高三复习教学应该由知识本位向思维和素养本位转变.高三复习课的教学质量是决定高三复习效果的关键,复习课除了要帮助学生回顾已学知识,更重要的是要促使学生升华知识、总结方法、提升能力、形成思维和发展素养.因此,要以促进学生理解数学本质和发展能力素养为前提进行复习课的教学设计.

微专题复习课是高三复习课的一种常见形式,其立足学情,以高考的高频考点、学生的学习难点、学生能力的增长点及易错点和易混淆点作为教学内容,具有“小切口聚焦,高精度突破”的特点,是促进学生深度复习的重要方式.具体教学中,贯彻“问题引导学习”的理念,通过设置一系列问题串,示以思维之道,引导学生开展有逻辑的探究与模型建构,通过解决问题促进学生对知识和方法的理解,从而真正掌握解决问题的方式和方法,培养学生的高阶思维,发展学生的关键能力,教会学生自主思考.笔者认为,这是高三数学复习教学的应有之义.

本文结合高三数列微专题复习课“数列求和放缩问题”,给出关于高三微专题复习教学的思考.

二、教学内容解析

数列是高中数学教学的重要内容,求和则是数列部分研究的主要内容之一.在近几年的高考中,也时

有出现将数列求和与不等式相结合命制的试题,用放缩法证明数列不等式则是问题解决的难点.因此,选取“数列求和放缩问题”作为微专题复习教学的主题具有现实意义.

数列放缩法灵活多变,需要一定的代数变形技巧,因此难度较大,不易掌握.但它也有法可依,只要运用得当,大部分数列不等式问题是可以放缩有术的.

本节课中,教师带领学生一起研究数列问题中几种常见的放缩类型和放缩方法,破解思维过程,领悟方法的本质.通过教学达到拓宽学生思维广度、延展学生思维深度、提高学生思维效度、丰富学生活动经验、升华学生知识体系、渗透数学思想方法,以及在发现和提出问题、分析和解决问题的过程中不断提高学生数学核心素养的目的.

三、教学过程设计

1. 温故知新,数列求和

问题1:数列研究的主要内容有什么?

预设:通项与求和是数列研究的两大主要内容.

问题2:有和就有通项这种说法对吗?有通项就能求和(确定的和公式)吗?

预设:通过 $a_n = \begin{cases} S_n - S_{n-1}, & n \geq 2, \\ S_1, & n = 1 \end{cases}$ 可以由和式求得

通项.并非利用所有的通项公式都能轻易求出确定的和的公式.

问题3:学习过的能求出和公式的数列有哪些?

作者简介:顾予恒(1981—),男,正高级教师,主要从事数学教学研究.

预设: 等差数列(公式法)、等比数列(公式法); 等差数列加等比数列(分组求和法); 等差数列乘等比数列(错位相减法); 可以裂项求和的数列(裂项相消法).

【设计意图】以问题串的形式引导学生回顾数列求和的相关知识和方法, 为后续和式放缩作好铺垫.

2. 例题引入, 和式放缩

例1 在① $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ (6分), ② $n+\left(\frac{1}{4}\right)^n$ (8分), ③ $n\left(\frac{1}{4}\right)^n$ (10分), ④ $n^2\left(\frac{1}{4}\right)^n$ (12分) 这四个条件中任选一个, 补充到下列横线上, 并完成问题的求解.

问题: 若 $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 求 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

【设计意图】以结构不良题型为呈现方式, 将几种求和(放缩)模型融入一道题目中, 这种设计方式具有一定的新意. 考虑到四个选项的难度有明显差异, 为此给每个选项配上不同的分值, 在提升学生研究兴趣的同时, 让学生在解答的过程中体会结构不良型问题的求解对条件的分析与选择很有讲究.

师生活动: 由学生自选任一选项完成对题目的解答, 也可以选择多个选项分别完成解答, 为不同水平的学生提供多种选择.

问题4: 预判选择哪些条件选项容易完成求解? 为什么?

预设: 选项①用公式法, 选项②用分组求和法, 选项③用错位相减法, 都比较容易求解. 而选项④似乎没有现成的求和公式可用, 求解难度较大.

3. 和式函数, 值域放缩

模型1: 有明确的通项公式, 可以求和($a_n \Rightarrow S_n$).

选择①: 若 $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$, 求 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$;

预设: 由等比数列求和公式, 得 $S_n = \frac{1}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$.

选择②: 若 $a_n = n + \left(\frac{1}{4}\right)^n$, 求 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$;

预设: 分组求和, 得 $S_n = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$.

选择③: 若 $a_n = n\left(\frac{1}{4}\right)^n$, 求 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$;

预设: 由错位相减法, 得 $S_n = \frac{4}{9} - \frac{n+3}{3 \times 4^n}$.

问题5: 能否将选择①②③对应的数列求和问题, 分别改编成不等式问题?

预设: 选择①, 因为 $S_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} < \frac{1}{3}$, 所以可以改编为: 若 $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$, 求证: $a_1 + a_2 + \cdots + a_n < \frac{1}{3}$.

选择②, 因为 $S_n = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$ 单调递增, 故 $S_n \geq S_1 = \frac{5}{4}$, 所以可以改编为: 若 $a_n = n + \left(\frac{1}{4}\right)^n$, 求证 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq \frac{5}{4}$.

选择③, 令 $b_n = \frac{n+3}{4^n}$, 因为 $\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{n+3}{4\left(n+\frac{1}{3}\right)} = \frac{3n+4}{12n+4} < 1$, 所以 $\{b_n\}$ 单调递减, 所以 $b_n = \frac{n+3}{4^n} \leq b_1 = \frac{7}{12}$. 所以 $S_n = \frac{4}{9} - \frac{n+3}{3 \times 4^n} \geq \frac{1}{4}$. 所以可以改编为: 若 $a_n = n\left(\frac{1}{4}\right)^n$, 求证 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq \frac{1}{4}$.

【设计意图】设计一个提问, 将原本简单的数列求和问题改编为不等式证明问题, 从相等到不等, 利用的正是放缩. 将和公式视为函数 $f(n) = S_n$, 则对和公式放缩的本质就是求函数的值域以寻求合适的上界或下界.

等比和式放缩模型: 若 $\{a_n\}$ 为等比数列, 则 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ($q \neq 1$).

当 $a_1 > 0, q \in (0, 1)$ 时,

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} (q \neq 1).$$

当 $a_1 < 0, q \in (0, 1)$ 时,

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} < \frac{a_1}{1-q} \quad (\text{上界});$$

当 $a_1 < 0, q \in (0, 1)$ 时,

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} > \frac{a_1}{1-q} \quad (\text{下界}).$$

对于选项①②③, 我们都求得了明确的和公式, 但其实只有少数特殊的数列可以得到求和公式, 对于更多的数列, 我们无法求出明确、简洁的和公式. 我们知道, 和公式 $S_n = f(n)$ 是等式, 如果退而求其次, 不需要确定的和式, 只需要大致确定其范围, 能否为其找到一个合适的上界或下界呢?

4. 通项放缩, 目标求和

模型2: 有明确的通项公式, 无法(不易)求和($a_n \not\Rightarrow S_n$).

选择④: 若 $a_n = n^2\left(\frac{1}{4}\right)^n$, 还能求 S_n 吗?

数列 $a_n = n^2 \left(\frac{1}{4}\right)^n$ 的求和不再常规, 对于很多学生

来说存在困难. 事实上, 此题可以用双错位相减的方法求和, 但是为了不偏离本节课的主题, 教师在课堂上不予展开, 而是让有兴趣的学生在课后进行尝试.

问题6: 能否在不求和的情况下将此题也改编成一个不等式问题?

追问1: 通项公式 $a_n = n^2 \left(\frac{1}{4}\right)^n$ 有什么特点?

追问2: 研究一个数列的常见方法有作差和作商两类, 这个数列用哪种方法更合适?

预设: 引导学生基于观察发现 $a_n = n^2 \left(\frac{1}{4}\right)^n$ 的通项公式是等比数列和二次型数列之积, 并确定采用作商法展开探究.

由 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{4^{n+1}} \cdot \frac{4^n}{n^2} = \frac{(n+1)^2}{4n^2} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right)^2$, 可知数列 $\{a_n\}$ 的后项与前项之比不是定值, 故其不是等比数列, 暂且称其为“变比”数列.

因为 $n \in \mathbf{N}^*$, 所以 $\frac{a_2}{a_1} = 1$, $\frac{a_3}{a_2} = \frac{9}{16}$, $\frac{a_4}{a_3} = \frac{4}{9}$, ...

因为 $\frac{1}{4} < \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right)^2 \leq 1$,

所以 $\frac{1}{4} < \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$.

因为 $a_1 = \frac{1}{4}$,

所以由累乘法, 得 $\left(\frac{1}{4}\right)^n \leq a_n \leq \frac{1}{4}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

再求和, 得 $\frac{1}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} \leq S_n \leq \frac{n}{4}$,

即 $\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \leq S_n \leq \frac{n}{4}$.

基于此设计改编题如下.

若 $a_n = n^2 \left(\frac{1}{4}\right)^n$, 求证: $\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \leq S_n \leq \frac{n}{4}$.

【设计意图】此题有意选取不易求得和公式的数列, 使之与前三个选项对应的值域放缩方式产生认知冲突. 故而引导学生转为对数列通项进行分析研究, 通过对通项公式的变比放缩, 确定和式的取值范围.

问题7: 对于 $\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \leq S_n \leq \frac{n}{4}$, 能否找到更为精确的上界和下界?

预设: 观察 $\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \leq S_n \leq \frac{n}{4}$, $\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$ 显然是一个等比和式放缩模型, 故用值域放缩法得 $\frac{1}{4} \leq S_n$. 对于 $S_n \leq \frac{n}{4}$, 学生可能直接取 $\frac{n}{4}$ 为正无穷,

进而确定 $\frac{1}{4} \leq S_n$.

问题8: 对于 $\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \leq S_n \leq \frac{n}{4}$ 的上界, 有人认为 $S_n < 1$, 你觉得可能吗?

追问: 对于 $a_n = n^2 \left(\frac{1}{4}\right)^n$ 和的取值范围的探究, 我们是从数列的第2项开始放缩的, 如果保持第1项和第2项不变, 从第3项开始放缩, 会得到怎样的结果?

预设: 当 $n \geq 2$ 时, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right)^2 \leq \frac{9}{16}$.

由累乘法, 得 $a_n \leq \frac{1}{4} \times \left(\frac{9}{16}\right)^{n-2}$.

所以 $a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{9}{16} + \dots + \frac{1}{4} \times \left(\frac{9}{16}\right)^{n-2} = \frac{1}{4} + \frac{4}{7} \times \left[1 - \left(\frac{9}{16}\right)^{n-1}\right] < \frac{1}{4} + \frac{4}{7} = \frac{23}{28} < 1$.

【设计意图】将和公式的取值上界由正无穷缩小为1, 巨大的落差引起学生的怀疑. 教师引导学生思考不等式成立的原因, 为放缩有度埋下伏笔. 同时, 利用追问为学生的探究指明方向. 在具体探究过程中, 学生找到了比1更加精确的上界, 教师抓住时机引导学生理解选取不同的目标放缩数列会得到不同的结果, 并学会用待定系数法寻找合适的目标放缩数列.

5. 递推变形, 通项放缩

下面再来看一个问题, 思考如果题干中只给出递推关系式, 无法求通项公式, 又该如何进行数列和式的放缩.

模型3: 通项未知递推型.

例2 已知数列 $\{a_n\}$, $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{2a_n + 1}{a_n + 2}$ ($n \in \mathbf{N}^*$),

记 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 证明: $S_n < n + \frac{3}{2}$.

解析: 观察要证的式子 $S_n < n + \frac{3}{2}$, 由于常数数列 $\{b_n\}$ ($b_n = 1$) 的和为 n , 故此题不妨改证数列 $\{a_n - 1\}$ 的前 n 项和 $T_n < \frac{3}{2}$.

构造 $a_{n+1} - 1 = \frac{2a_n + 1}{a_n + 2} - 1 = \frac{a_n - 1}{a_n + 2}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 注意到 $\frac{a_{n+1} - 1}{a_n - 1} = \frac{1}{a_n + 2} = "q"$, 这个结构类似于等比数列中的后项比前项, “变比”是一个与 a_n 有关的变量. 我们可以通过确定变比的范围 (即求 $\frac{1}{a_n + 2}$ 的值域), 从而找到新数列 $\{a_n - 1\}$ 的放缩目标数列.

因为 $\frac{a_{n+1} - 1}{a_n - 1} = \frac{1}{a_n + 2} > 0$,

所以数列 $\{a_n - 1\}$ 各项同号.

因为 $a_1 - 1 = 1 > 0$, 所以 $a_n > 1$.

所以 $\frac{a_{n+1} - 1}{a_n - 1} = \frac{1}{a_n + 2} < \frac{1}{3}$.

于是 $a_n - 1 \leq (a_1 - 1) \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$,

即 $a_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 1$, 这样就找到了数列 $\{a_n\}$ 的一个上界目标数列.

即 $S_n = a_1 + \cdots + a_n \leq n + \left(\frac{1}{3}\right)^0 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = n + 1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} < n + \frac{3}{2}$.

教师带领学生经历递推放缩的证明过程, 尤其重视其中的分析与思考. 同时, 此题的上界 $n + \frac{3}{2}$ 并不精确, 教师鼓励有兴趣的学生在课后进一步思考如何求得更精确的上界.

6. 课堂小结, 画龙点睛

数列求和看通项, 因此放缩的过程也通常从数列的通项入手. 本节课中, 我们一起经历了“有通项有和一有通项无和一无通项无和”的研究之旅, 逐步探寻了“类等比数列”的和式放缩问题. 我们可以感受到在学习中有意识地积累、总结一些常用的放缩模型和放缩方法非常必要.

和式函数值域放缩: 如果由通项可以求得明确的和公式, 那么可以基于函数求值域的视角, 对和公式(和函数)进行放缩, 实现从相等关系到不等关系的转化.

通项放缩目标求和: 如果由通项不易求得明确的和公式, 那么可以研究通项, 对通项进行适当放缩, 找寻通项的上界或下界目标数列(可求和), 从而实现放缩. 在放缩过程中, 对通项的变形要向可求和数列的通项靠拢, 常见的是向等比数列和可裂项相消的数列靠拢.

递推关系通项放缩: 从递推公式入手, 对其进行适当变形, 即将递推公式放缩变形成为可“累加”或“累乘”的形式, 然后通过“累加”或“累乘”实现一侧为 a_n , 另一侧为求和的结果, 进而完成证明.

正所谓: 求和首要看通项, 求出和式能估值; 不易求和变通项, 放缩目标能求和; 通项若是也未知, 只待递推来变形; 等差等比最基础, 放缩坚持回原点.

【设计意图】教师引导学生回顾本节课研究的内容, 以及探究的过程和其中涉及的方法和思想, 并用

一首打油诗帮助学生记忆和巩固.

四、教学反思

1. 教学设计遵循数列研究的一般过程

本节课的教学设计牢牢抓住通项与求和这两个数列研究的主要内容, 以运算为一般观念, 引导学生通过运算发现规律、通过代数推理证明规律, 具有鲜明的代数特点. 不同放缩模型的研究过程和方法具有相似性, 因此在教学过程中要注重遵循数列研究的一般方法, 从具体到抽象, 让学生通过类比展开学习. 等比数列是最基本而有用的一类数列, 为学生研究其他类型的数列提供了工具, 本节课特别注重探究内容与等比数列的联系和类比, 通过代数变形将其他类型的数列问题化归为类等比数列解决.

2. 教学过程环环相扣、富有新意

本节课贯彻“问题引导学习”的思想, 以问题串和追问的方式将整节课的探究内容整合成一体, 由浅入深、环环相扣. 特别是以结构不良题型的呈现方式, 将几种求和(放缩)模型融入一道例题中, 构思巧妙且富有新意. 在教学过程中, 教师并不是简单地给题、做题、讲题, 而是多次巧妙地分阶段呈现问题, 引导学生关注数列通项与求和公式之间的关系, 以加深学生对相等与不等之间联系的体会.

3. 教学实现破题有术, 学生素养有所提升

本节课中, 总结了数列和式放缩的三种常见模型和放缩步骤, 使得破解数列和式不等式问题有规律可循、有方法可依. 通过对数列和式放缩法的学习, 能有效提升学生的数学运算、逻辑推理和数学抽象素养.

参考文献:

- [1] 章建跃. 核心素养立意的高中数学课程教材教法研究[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2021.
- [2] 王先义. 基于“生本”理念的“一题一课”微专题复习课探究: 以“含参函数零点问题”为例[J]. 中学数学月刊, 2023(1): 25-30.
- [3] 王萍萍. 立足最近发展区 追求自然生长: 以“数列放缩”为例谈高三解题教学[J]. 中学教研(数学), 2021(7): 19-22.
- [4] 王连英. 基于深度学习的“数列不等式放缩”复习课的微设计[J]. 数学通讯, 2021(16): 27-30.