

回眸神奇的直线参数方程

——参数法巧解直线与圆锥曲线相交问题

李才养

(广东省佛山市第四中学, 广东 佛山 528000)

平面内经过点 $M_0(x_0, y_0)$, 倾斜角为 α ($\alpha \neq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \alpha < \pi$) 的直线 l 的参数方程

为 $\begin{cases} x = x_0 + t \cos \alpha, \\ y = y_0 + t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数), 当直线 l 上动点

$M(x, y)$ 在点 M_0 上方 (即 $y > y_0$) 时 $t > 0$; 当 $M(x, y)$ 在点 M_0 下方 (即 $y < y_0$) 时 $t < 0$; $|t|$ 表示距离 $|M_0M|$, 这一几何意义是常见的解题切入点.

2021 年全国新课标卷作出重大改革, 取消了两道选做题, 许多师生想当然地认为参数法在新高考中将无用武之地, 故没有把选修 4-4 列入教学计划. 今年全国 I 卷第 21 题让他们惊愕不已, 该题运用参数法求解会比较轻松地得到答案, 这是巧合还是命题者有意为之? 部分直线与圆锥曲线相交问题运用参数法求解比较新颖独到, 希望广大教育工作者结合学情, 一如既往地重视参数法, 让参数法发扬光大. 本文将从直线参数方程的视角, 研究近几年全国高考卷 (或拓展题) 中的“直线与圆锥曲线相交问题”, 回眸直线参数方程的神奇之处.

1 巧解定值问题

例 1 (2021 年高考全国 I 卷第 21 题) 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $F_1(-\sqrt{17}, 0)$, $F_2(\sqrt{17}, 0)$, 点 M 满足 $|MF_1| - |MF_2| = 2$. 记 M 的轨迹为 C .

(1) 求 C 的方程; (2) 设点 T 在直线 $x = \frac{1}{2}$

上, 过 T 的两条直线分别交 C 于 A, B 两点和 P, Q 两点, 且 $|TA| \cdot |TB| = |TP| \cdot |TQ|$, 求直线 AB 的斜率与直线 PQ 的斜率之和.

分析: 虽然点 T 位置不固定, 但 $|TA|$,

$|TB|$, $|TP|$, $|TQ|$ 均表示两直线上动点到点 T 的距离, 问题中的直线斜率与倾斜角更是直接关联, 故可考虑通过直线参数方程来求解.

解: (1) C 的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{16} = 1 (x > 0)$.

(2) 设 $T(\frac{1}{2}, m)$, 直线 AB 的倾斜角为 α , 直线 PQ 的倾斜角为 β , 则直线 AB 的参数方程为

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + t \cos \alpha, \\ y = m + t \sin \alpha \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}),$$

代入 $x^2 - \frac{y^2}{16} = 1 (x > 0)$ 并整理得

$$(17 \cos^2 \alpha - 1)t^2 + (16 \cos \alpha - 2m \sin \alpha)t - (m^2 + 12) = 0.$$

结合题意可知, 该关于 t 的方程有两同号实根 t_1, t_2 , 且有

$$\begin{aligned} |TA| \cdot |TB| &= |t_1| \cdot |t_2| \\ &= t_1 t_2 = -\frac{m^2 + 12}{17 \cos^2 \alpha - 1}, \end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned} |TP| \cdot |TQ| &= |t_3| \cdot |t_4| \\ &= t_3 t_4 = -\frac{m^2 + 12}{17 \cos^2 \beta - 1}. \end{aligned}$$

因为 $|TA| \cdot |TB| = |TP| \cdot |TQ|$, 所以 $17 \cos^2 \alpha - 1 = 17 \cos^2 \beta - 1$, 因此, $\cos \alpha = \pm \cos \beta$, 又因为 $\alpha, \beta \in (0, \pi)$ 且 $\alpha \neq \beta$, 所以 $\alpha + \beta = \pi$, 故 $k_{AB} + k_{PQ} = \tan \alpha + \tan \beta = \tan \alpha + \tan(\pi - \alpha) = 0$.

故直线 AB 的斜率和直线 PQ 的斜率之和为 0.

2 巧解最值问题

例2 (2013年高考全国新课标Ⅱ卷理科第20题) 平面直角坐标系 xOy 中, 过椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 右焦点 F 的直线 $x + y - \sqrt{3} = 0$ 交 M 于 A, B 两点, P 为 AB 的中点, 且 OP 的斜率为 $\frac{1}{2}$.

(I) 求 M 的方程;

(II) C, D 为 M 上的两点, 若四边形 $ACBD$ 的对角线 $CD \perp AB$, 求四边形 $ACBD$ 面积的最大值.

分析: 由 $CD \perp AB$, 可得直线 CD 的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$; 借助线段 AB 上交点 Q , 长度 $|CD|$ 可以转化为 $|QC| + |QD|$, 需注意的是, C, D 分别在 Q 点上下两侧, 故 $|CD| = |t_1 - t_2|$.

解: (I) M 的方程为 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(II) 由 $\begin{cases} x + y - \sqrt{3} = 0, \\ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases}$ 解得

$$\begin{cases} x = \frac{4\sqrt{3}}{3}, \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 0, \\ y = \sqrt{3}. \end{cases}$$

因此 $|AB| = \frac{4\sqrt{6}}{3}$.

易知直线 AB 的倾斜角为 $\frac{3\pi}{4}$, 由 $CD \perp AB$,

所以直线 CD 的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$.

设 CD 与 AB 交于点 $Q(m, \sqrt{3} - m) (0 < m < \frac{4\sqrt{3}}{3})$, 直线 CD 的参数方程为

$$\begin{cases} x = m + \frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y = \sqrt{3} - m + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}),$$

代入椭圆 M 的方程 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$, 并化简得 $\frac{3}{2}t^2 +$

$$(2\sqrt{6} - \sqrt{2}m)t + 3m^2 - 4\sqrt{3}m = 0.$$

由题意可知, 关于 t 的方程有两异号实根 t_1, t_2 , 由韦达定理得

$$t_1 + t_2 = -\frac{2 \times (2\sqrt{6} - \sqrt{2}m)}{3},$$

$$t_1 t_2 = \frac{2 \times (3m^2 - 4\sqrt{3}m)}{3},$$

所以

$$\begin{aligned} & (t_1 - t_2)^2 \\ &= (t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2 \\ &= \left[-\frac{2 \times (2\sqrt{6} - \sqrt{2}m)}{3} \right]^2 - 8 \times \frac{(3m^2 - 4\sqrt{3}m)}{3} \\ &= \frac{-64m^2 + 64\sqrt{3}m + 96}{9}, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} |CD| &= |QC| + |QD| = |t_1| + |t_2| \\ &= |t_1 - t_2| = \frac{4\sqrt{-4m^2 + 4\sqrt{3}m + 6}}{3}. \end{aligned}$$

所以四边形 $ACBD$ 的面积

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times |AB| \times |CD| \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{6}}{3} \times \frac{4\sqrt{-4m^2 + 4\sqrt{3}m + 6}}{3} \\ &= \frac{8\sqrt{6}}{9} \sqrt{-4\left(m - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 9}. \end{aligned}$$

因为 $0 < m < \frac{4\sqrt{3}}{3}$, 所以 $m = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时, S 取得

最大值 $\frac{8\sqrt{6}}{3}$.

3 巧解弦长问题

例3 (2019年高考全国Ⅰ卷理科第19题) 已知抛物线 $C: y^2 = 3x$ 的焦点为 F , 斜率为 $\frac{3}{2}$ 的直线 l 与 C 的交点为 A, B , 与 x 轴的交点为 P .

(1) 若 $|AF| + |BF| = 4$, 求 l 的方程;

(2) 若 $\vec{AP} = 3\vec{PB}$, 求 $|AB|$.

分析: 由 $\vec{AP} = 3\vec{PB}$, 可知 A, B 两点在 P 上下两侧, 且有 $t_{PA} = -3t_{PB}$.

解: (1) 直线 l 的方程为: $y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{8}$, 即:

$$12x - 8y - 7 = 0.$$

(2) 设 $P(m, 0)$, 由 $\tan \alpha = \frac{3}{2}$, 易得

$$\cos \alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}, \sin \alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13},$$

所以直线 l 的参数方程为

$$\begin{cases} x = m + \frac{2\sqrt{13}}{13}t, \\ y = \frac{3\sqrt{13}}{13}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}).$$

代入 $y^2 = 3x$ 并整理得

$$3t^2 - 2\sqrt{13}t - 13m = 0.$$

由 $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{PB}$ 可知, 该关于 t 的方程有两异号实根 t_1, t_2 , 不妨令 $|PA| = |t_1|, |PB| = |t_2|$, 由韦达定理得 $t_1 + t_2 = \frac{2\sqrt{13}}{3}$. 因为 $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{PB}$, 所以可设 $t_1 = -3t_2$, 联立并解得 $t_2 = -\frac{\sqrt{13}}{3}$, 所以 $t_1 = -3t_2 = \sqrt{13}$, 于是, $|AB| = |PA| + |PB| = |t_1 - t_2| = \frac{4\sqrt{13}}{3}$.

4 巧解面积问题

例4 (2020年高考全国新课标Ⅲ卷理科第20题) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{m^2} = 1 (0 < m < 5)$

的离心率为 $\frac{\sqrt{15}}{4}$, A, B 分别为 C 的左、右顶点.

(1) 求 C 的方程;

(2) 若点 P 在 C 上, 点 Q 在直线 $x = 6$ 上, 且 $|BP| = |BQ|$, $BP \perp BQ$, 求 $\triangle APQ$ 的面积.

分析: 利用 B 点建立直线参数方程, 则非零解 t 的绝对值就是长度 $|BP|$ (或 $|BQ|$), 由 $BP \perp BQ$, 可知两直线倾斜角的差为 $\frac{\pi}{2}$. 结合图像, 求 $\triangle APQ$ 的面积就可以转化为 $\triangle ABQ$ 面积的切割.

解: (1) C 的方程为 $\frac{x^2}{25} + \frac{16y^2}{25} = 1$;

(2) 不妨设 P, Q 在 x 轴上方, 易知 $B(5, 0)$, $|AB| = 10$.

设直线 BP 的倾斜角为 α , 由图像可知 $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 直线 BQ 的倾斜角为 $\alpha - \frac{\pi}{2}$ (如图1).

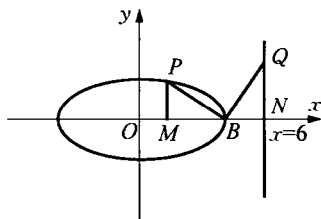


图1

直线 BP 的参数方程为

$$\begin{cases} x = 5 + t\cos \alpha, \\ y = t\sin \alpha \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}).$$

代入方程 $\frac{x^2}{25} + \frac{16y^2}{25} = 1$ 并整理得

$$(1 + 15\sin^2 \alpha) \cdot t^2 + 10\cos \alpha \cdot t = 0.$$

由题意可知, $|BP| = t = \frac{-10\cos \alpha}{1 + 15\sin^2 \alpha}$.

直线 BQ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = 5 + t\cos(\alpha - \frac{\pi}{2}), \\ y = t\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}),$$

即

$$\begin{cases} x = 5 + t\sin \alpha, \\ y = -t\cos \alpha. \end{cases}$$

由 $x = 5 + t\sin \alpha = 6$, 解得 $|BQ| = t = \frac{1}{\sin \alpha}$.

因为 $|BP| = |BQ|$, 所以 $\frac{-10\cos \alpha}{1 + 15\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha}$, 整理得 $16\sin^2 \alpha + 10\sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 0$, 所以 $16\tan^2 \alpha + 10\tan \alpha + 1 = 0$, 解得 $\tan \alpha = -\frac{1}{2}$ 或 $\tan \alpha = -\frac{1}{8}$.

① 当 $\tan \alpha = -\frac{1}{2}$ 时, 易得 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$,

$\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $|BP| = |BQ| = t = \frac{1}{\sin \alpha} = \sqrt{5}$,

$y_P = t \sin \alpha = 1$, $y_Q = -t \cos \alpha = 2 > y_P$ (如图2), 所以

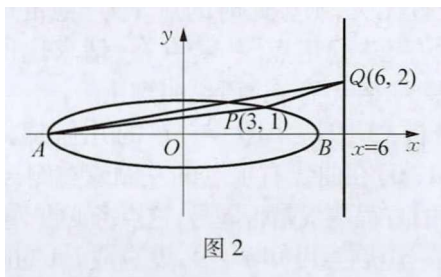


图2

$$S_{\triangle ABQ} = \frac{1}{2} \times |AB| \times y_Q = \frac{1}{2} \times 10 \times 2 = 10,$$

$$S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} \times |AB| \times y_P = \frac{1}{2} \times 10 \times 1 = 5,$$

$$S_{\triangle BPQ} = \frac{1}{2} \times |BP| \times |BQ| = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} = \frac{5}{2},$$

$$\text{于是, } S_{\triangle APQ} = S_{\triangle ABQ} - S_{\triangle ABP} - S_{\triangle BPQ} = 10 - 5 - \frac{5}{2} = \frac{5}{2}.$$

② 当 $\tan \alpha = -\frac{1}{8}$ 时, 易得

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{65}}{65}, \cos \alpha = -\frac{8\sqrt{65}}{65},$$

$$|BP| = |BQ| = t = \frac{1}{\sin \alpha} = \sqrt{65},$$

$y_P = t \sin \alpha = 1$, $y_Q = -t \cos \alpha = 8 > y_P$ (如图3),

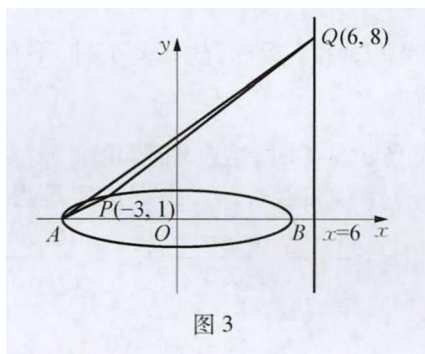


图3

所以

$$S_{\triangle ABQ} = \frac{1}{2} \times |AB| \times y_Q = \frac{1}{2} \times 10 \times 8 = 40,$$

$$S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} \times |AB| \times y_P = \frac{1}{2} \times 10 \times 1 = 5,$$

$$S_{\triangle BPQ} = \frac{1}{2} \times |BP| \times |BQ|$$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{65} \times \sqrt{65} = \frac{65}{2},$$

于是, $S_{\triangle APQ} = S_{\triangle ABQ} - S_{\triangle ABP} - S_{\triangle BPQ} = 40 - 5 - \frac{65}{2} = \frac{5}{2}.$

综上所述, $\triangle APQ$ 面积为 $\frac{5}{2}.$

5 巧解取值范围

例5 (2016年高考全国新课标I卷理科第20题) 设圆 $x^2 + y^2 + 2x - 15 = 0$ 的圆心为A, 直线 l 过点B(1, 0) 且与x轴不重合, l 交圆A于C、D两点, 过点B作AC的平行线交AD于点E.

(I) 证明 $|EA| + |EB|$ 为定值, 并写出点E的轨迹方程;

(II) 设点E的轨迹为曲线 C_1 , 直线 l 交 C_1 于M、N两点, 过点B且与 l 垂直的直线与圆A交于P、Q两点 (见图4), 求四边形MPNQ面积的取值范围.

分析: $l \perp l_{PQ}$, 故倾斜角相差 $\frac{\pi}{2}$, 利用 $|t|$

的几何意义可分别表示出 $|MN|$, $|PQ|$.

解: (I) 点E的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 (y \neq 0);$$

(II) ① 当直线 l 垂直x轴时, 易得

$$|MN| = 2 \times \frac{3}{2} = 3, |PQ| = 8,$$

此时, 四边形MPNQ的面积 $S = \frac{1}{2} \times 8 \times 3 = 12.$

② 当直线 l 不垂直于x轴时, 设直线 l 的倾斜角为 α , 由图形对称性, 不妨令 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + t \cos \alpha \\ y = t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为

参数), 代入方程 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 (y \neq 0)$, 并整理得

$$(3 + \sin^2 \alpha) \cdot t^2 + 6 \cos \alpha \cdot t - 9 = 0.$$

由题意可知, 该关于 t 的方程有两异号实根 t_1, t_2 , 由韦达定理得

$$t_1 + t_2 = -\frac{6 \cos \alpha}{3 + \sin^2 \alpha}, t_1 t_2 = \frac{-9}{3 + \sin^2 \alpha},$$

所以

$$(t_1 - t_2)^2 = (t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2$$

$$= \left(-\frac{6\cos\alpha}{3+\sin^2\alpha} \right)^2 + 4 \times \frac{9}{3+\sin^2\alpha}$$

$$= \frac{144}{(3+\sin^2\alpha)^2},$$

因此

$$|MN| = |BN| + |BM| = |t_1| + |t_2|$$

$$= |t_1 - t_2| = \frac{12}{3+\sin^2\alpha}.$$

因为直线 PQ 与直线 l 垂直,故直线 PQ 的

参数方程为
$$\begin{cases} x = 1 + t\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right), \\ y = t\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \quad (t \text{ 为参$$

数), 即 $\begin{cases} x = 1 - t\sin\alpha, \\ y = t\cos\alpha \end{cases}$ (t 为参数), 代入圆 A

的方程 $x^2 + y^2 + 2x - 15 = 0$, 整理得 $t^2 - 4\sin\alpha \cdot t - 12 = 0$, 由题意可知, 该关于 t 的方程有两异号实根 t_3, t_4 , 由韦达定理得 $t_3 + t_4 = 4\sin\alpha$, $t_3 t_4 = -12$, 所以

$$(t_3 - t_4)^2 = (t_3 + t_4)^2 - 4t_3 t_4$$

$$= 16\sin^2\alpha + 48 = 16(\sin^2\alpha + 3),$$

因此,

$$|PQ| = |BP| + |BQ| = |t_3| + |t_4|$$

$$= |t_3 - t_4| = 4\sqrt{\sin^2\alpha + 3},$$

所以四边形 $MPNQ$ 的面积

$$S = \frac{1}{2} \times |MN| \times |PQ| = \frac{1}{2} \times \frac{12}{3+\sin^2\alpha} \times 4\sqrt{\sin^2\alpha + 3} = \frac{24}{\sqrt{3+\sin^2\alpha}}.$$

因为 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $\sqrt{\sin^2\alpha + 3} \in (\sqrt{3}, 2)$, 所以 $S \in (12, 8\sqrt{3})$.

综上, 四边形 $MPNQ$ 的面积取值范围是 $[12, 8\sqrt{3})$.

6 巧解存在性问题

例题6 (2021年高考全国I卷第21题第2问改编) 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $F_1(-\sqrt{17}, 0)$, $F_2(\sqrt{17}, 0)$, 点 M 满足 $|MF_1| - |MF_2| = 2$. 记 M 的轨迹为 C .

(1) 求 C 的方程; (2) 设 P 为曲线 C 上一动点, 点 $A(a, 0)$ 在 x 轴上, 直线 PA 交曲线 C

于另一点 Q , 记 $m = \frac{1}{|AP|} + \frac{1}{|AQ|}$, 若 m 值与 P 点位置无关, 则称此时的点 A 为“稳定点”. 试问是否存在“稳定点”? 若存在, 请求出所有的“稳定点”; 若不存在, 请说明理由.

分析: $|AP|$, $|AQ|$ 与 $|t|$ 的几何意义相关联, $A(a, 0)$ 在曲线右顶点的左侧或右侧, 会影响关于 t 的方程两根是否同号, 这点务必严谨分析.

解: 由题意可知 $a \neq 1$, 设直线 PA 的倾斜角为 α , 则其参数方程为 $\begin{cases} x = a + t\cos\alpha, \\ y = t\sin\alpha \end{cases}$ (t 为参数), 代入曲线 $x^2 - \frac{y^2}{16} = 1 (x > 0)$, 并整理得 $(17\cos^2\alpha - 1)t^2 + 32a\cos\alpha \cdot t + 16(a^2 - 1) = 0$.

① 当 $a < 1$ 时, 结合图形可知, 该关于 t 的方程有两同号实根 t_1, t_2 , 由韦达定理得

$$t_1 + t_2 = -\frac{32a\cos\alpha}{17\cos^2\alpha - 1}, \quad t_1 t_2 = \frac{16(a^2 - 1)}{17\cos^2\alpha - 1},$$

所以

$$m = \frac{1}{|AP|} + \frac{1}{|AQ|} = \frac{1}{|t_1|} + \frac{1}{|t_2|}$$

$$= \frac{|t_1| + |t_2|}{|t_1 t_2|} = \frac{|t_1 + t_2|}{|t_1 t_2|}$$

$$= \left| \frac{32a\cos\alpha}{16(a^2 - 1)} \right|.$$

若 $a \neq 0$, m 的值会随 α 的变化而变化, 显然与 P 点的位置有关; 若 $a = 0$, $m = \frac{1}{|AP|} + \frac{1}{|AQ|} = 0$ 显然不成立, 故 $a < 1$ 时, 不存在“稳定点”.

② 当 $a > 1$ 时, 结合图形可知, 该关于 t 的方程有两异号实根 t_1, t_2 , 由韦达定理得

$$t_1 + t_2 = -\frac{32a\cos\alpha}{17\cos^2\alpha - 1}, \quad t_1 t_2 = \frac{16(a^2 - 1)}{17\cos^2\alpha - 1},$$

所以

$$(t_1 - t_2)^2 = (t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2$$

$$= \left(-\frac{32a\cos\alpha}{17\cos^2\alpha - 1} \right)^2 - 4 \times \frac{16(a^2 - 1)}{17\cos^2\alpha - 1}$$

$$= 64 \times \frac{16a^2\cos^2\alpha - (a^2 - 1) \cdot (17\cos^2\alpha - 1)}{(17\cos^2\alpha - 1)^2}$$

$$= 64 \times \frac{a^2\sin^2\alpha + 17\cos^2\alpha - 1}{(17\cos^2\alpha - 1)^2}$$

$$= 64 \times \frac{(a^2 - 17)\sin^2 \alpha + 16}{(17\cos^2 \alpha - 1)^2},$$

所以

$$|t_1 - t_2| = 8 \times \frac{\sqrt{(a^2 - 17)\sin^2 \alpha + 16}}{|17\cos^2 \alpha - 1|}.$$

因此,

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{|AP|} + \frac{1}{|AQ|} = \frac{1}{|t_1|} + \frac{1}{|t_2|} \\ &= \frac{|t_1| + |t_2|}{|t_1 t_2|} = \frac{|t_1 - t_2|}{|t_1 t_2|} \\ &= \frac{8\sqrt{(a^2 - 17)\sin^2 \alpha + 16}}{16(a^2 - 1)}. \end{aligned}$$

当 $a = \sqrt{17}$ 时, $m = \frac{1}{8}$, 与 P 点位置无关, 故

$A(\sqrt{17}, 0)$ 为“稳定点”. 除此之外, 无其他“稳定点”.

综上所述, 存在“稳定点” $A(\sqrt{17}, 0)$, 且是唯一的“稳定点”.

例 7 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$

的两个焦点与短轴的一个端点是直角三角形的三个顶点, 直线 $l: y = -x + 3$ 与椭圆 E 有且只有一个公共点 T .

(1) 求椭圆 E 的方程及点 T 的坐标;

(2) 设 O 是坐标原点, 直线 l' 平行于 OT , 与椭圆 E 交于不同的两点 A, B , 且与直线 l 交于点 P (如图 4). 证明: 存在常数 λ , 使得 $|PT|^2 = \lambda |PA| \cdot |PB|$, 并求 λ 的值.

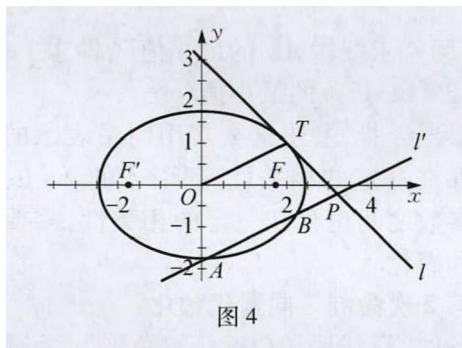


图 4

分析: 由 $l_{AB} \parallel l_{OT}$, 结合斜率 k_{OT} , 可得直线 AB 倾斜角的正弦值、余弦值; 再利用点 P 的坐标便可以写出直线 AB 的参数方程.

解: (1) 椭圆 E 的方程是 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$, 点 T 的坐标 $(2, 1)$.

(2) 由题意设直线 AB 的方程为 $y = \frac{1}{2}x + m$

$m (m \neq 0)$, 联立方程组 $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + m, \\ y = -x + 3, \end{cases}$ 解得

$P(2 - \frac{2}{3}m, 1 + \frac{2}{3}m)$, 所以 $|PT|^2 = (2 + \frac{2}{3}m - 2)^2 + (1 - \frac{2}{3}m - 1)^2 = \frac{8}{9}m^2$. 因为 $k =$

$\tan \alpha = \frac{1}{2}$, 所以 $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 故直线 AB 的参数方程为

$$\begin{cases} x = 2 - \frac{2}{3}m + \frac{2\sqrt{5}}{5}t, \\ y = 1 + \frac{2}{3}m + \frac{\sqrt{5}}{5}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}).$$

代入椭圆 E 的方程, 并化简得

$$\frac{6}{5}t^2 + \frac{12\sqrt{5}}{5}t + \frac{4}{3}m^2 = 0.$$

由题意可知, 该关于 t 的方程有两相异实根 t_1, t_2 , 且有

$$\begin{aligned} |PA| \cdot |PB| &= |t_1| \cdot |t_2| \\ &= \frac{\frac{4}{3}m^2}{\frac{6}{5}} = \frac{10}{9}m^2, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \lambda = \frac{|PT|^2}{|PA| \cdot |PB|} = \frac{\frac{8}{9}m^2}{\frac{10}{9}m^2} = \frac{4}{5}.$$

解法归纳

在直线的众多方程中, 其参数方程形式最为复杂, 但在解决直线与圆锥曲线问题时却往往有独到之处, 甚至让人情不自禁拍案叫绝! 运用直线的参数方程解题, 往往从 $|t|$ 这一几何意义切入, 再结合题目其他信息点来逐步完善, 相关题型有一定的“模式化”特征, 解答时也有相应的“解题格式”.