○解题思路与方法○

求解数列不等式的常见放缩技巧

白亚军

(甘肃省永昌县第一高级中学,737200)

数列不等式为高中数学的重点和难点,常出现在高考压轴题中,具有极高的思想性和技巧性. 解决数列不等式的一般思想是进行合理地放缩,放缩后能够再运算是解决此类问题的重要原则. 熟记一些常见的放缩结论,掌握一些常见的放缩技巧很重要. 本文结合教学实际给出了解决数列不等式的几个放缩策略,希望能给学生的学习有所帮助.

一、裂项放缩法

裂项放缩法是应用最广泛的放缩技巧,常见于积式、分式、根式、二次式等结构,其基本思想是转化成差形结构 $f(n)-f(n-1)$ 累加求和解决问题,一般思路是配积取倒数凑差.

1. 分母整式型裂项

例 1　求证: $\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^3}<\frac{1}{4}$.

证明　因为 $\frac{1}{k^3}<\frac{1}{k^3-k}=\frac{1}{k(k^2-1)}=\frac{1}{(k-1)k(k+1)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(k-1)k}-\frac{1}{k(k+1)}\right]$,

所以 $\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^3}<\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1\times 2}-\frac{1}{2\times 3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\times 3}-\frac{1}{3\times 4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]<\frac{1}{4}$. 得证.

评注　常用基本结论有 $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}<\frac{4}{4n^2-1}=2\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$, $\frac{1}{n^3}<\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right]$ 等.

2. 分母根式型裂项

例 2　对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, 求证: $\frac{1}{\sqrt{1^3}}+\frac{1}{\sqrt{2^3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^3}}<3$.

证明　因为 $\sqrt{k^3}=\frac{1}{2}(k\sqrt{k}+k\sqrt{k})>\frac{1}{2}[k\sqrt{k-1}+(k-1)\sqrt{k}]=\frac{1}{2}\sqrt{k}\sqrt{k-1}[\sqrt{k}+\sqrt{k-1}]$, 所以 $\frac{1}{\sqrt{k^3}}<2\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}}-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$.

于是 $\frac{1}{\sqrt{1^3}}+\frac{1}{\sqrt{2^3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^3}}<1+2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=3-\frac{2}{\sqrt{n}}<3$. 得证.

评注　常用基本结论有 $2\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)<\frac{1}{\sqrt{k^3}}=\frac{1}{k\sqrt{k}}<2\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}}-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$, $\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}}<2\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$ 等.

二、等比放缩法

等比放缩适用于指数结构. 当前后项不是纯等比关系时,可以考虑将前后项的比值放缩成一个常数,将问题转化为等比数列求和来处理.

例 3　对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, 求证: $\frac{1}{3+1}+$

$\frac{1}{3\times2+1}+\cdots+\frac{1}{3\times2^{n-1}+1}<\frac{4}{7}$.

证明 当 $n=1,2$ 时,不等式显然成立.

当 $n\geqslant3$ 时,因为 $\frac{1}{3\times2^{n-1}+1}<\frac{1}{3\times2^{n-1}}$,

所以 $\frac{1}{3+1}+\frac{1}{3\times2+1}+\cdots+\frac{1}{3\times2^{n-1}+1}<\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{3\times2^2}+\cdots+\frac{1}{3\times2^{n-1}}=\frac{11}{28}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{1}{2^2}\left(1-\frac{1}{2^{n-2}}\right)}{1-\frac{1}{2}}<\frac{11}{28}+\frac{1}{6}=\frac{47}{84}<\frac{48}{84}=\frac{4}{7}$.

综上,得证.

评注 本题需从第 3 项开始放大,否则会放得太大,达不到解题的目的.

三、对偶放缩法

例 4 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$,求证:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2n}\right)<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

证明 令 $S=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2n}\right)$,只要证

$$S=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}. \quad ①$$

由糖水不等式 $\frac{b}{a}<\frac{b+m}{a+m}(a>b>0,m>0)$(此处证明略),可得 $S<\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\cdots\times\frac{2n}{2n+1}$. 要证 ① 式成立,只要证

$$S=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\cdots\times\frac{2n}{2n+1}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}. \quad ②$$

① 与 ② 相乘,得 $S^2<\frac{1\cdot2\cdot3\cdots(2n)}{2\cdot3\cdot4\cdots(2n+1)}=\frac{1}{2n+1}$,所以 $S<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$. 得证.

评注 糖水不等式 $\frac{b}{a}<\frac{b+m}{a+m}(a>b>0,m>0)$ 或 $\frac{b}{a}>\frac{b+m}{a+m}(b>a>0,m>0)$ 是我们需要熟知的基本结论.

四、积分放缩法

例 5 求证: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$.

证明 因为 $\frac{1}{n}<\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x}dx=\ln n-\ln(n-1)$,所以 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}<(\ln2-\ln1)+(\ln3-\ln2)+\cdots+[\ln(n+1)-\ln n]=\ln(n+1)$.

因为 $\frac{1}{n}>\int_{n}^{n+1}\frac{1}{x}dx=\ln(n+1)-\ln n$,

所以 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}>(\ln2-\ln1)+(\ln3-\ln2)+\cdots+[\ln(n+1)-\ln n]=\ln(n+1)$.

评注 积分放缩法主要是利用积分的几何意义进行放缩.

五、函数放缩法

例 6 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$,求证:

$$\frac{\ln2}{2}+\frac{\ln3}{3}+\cdots+\frac{\ln3^n}{3^n}<3^n-\frac{5n+6}{6}.$$

证明 由切线不等式 $\ln x\leqslant x-1$(此处证明略),得 $\frac{\ln x}{x}\leqslant1-\frac{1}{x}$.

于是 $\frac{\ln2}{2}+\frac{\ln3}{3}+\cdots+\frac{\ln3^n}{3^n}<1-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{3}+\cdots+1-\frac{1}{3^n}=3^n-1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right)$,只需证 $3^n-1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right)\leqslant3^n-1-\frac{5n}{6}$,即证 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^n}\geqslant\frac{5n}{6}$.

因为 $\frac{1}{n}>\int_{n}^{n+1}\frac{1}{x}dx=\ln(n+1)-\ln n$,

所以 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^n}>\int_{2}^{3}\frac{1}{x}dx+\int_{3}^{4}\frac{1}{x}dx+\cdots+\int_{3^n}^{3^{n+1}}\frac{1}{x}dx=\ln(3^n+1)-\ln2>\ln3^n-\ln2>\frac{5n}{6}(n\geqslant3)$.

(下转第 20 页)

(A) $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BC}=4$

(B) $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=-6$

(C) $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

(D) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{HM}$

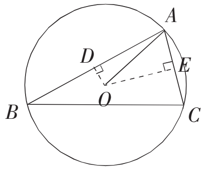

图 12

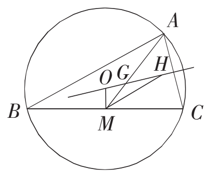

图 13

解 由 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，得 $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，所以 $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{3}(|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2)=-4$，选项 A 错误.

如图12，过点 O 分别作 AB,AC 的垂线，易知垂足 D,E 分别是 AB,AC 的中点，故数量积 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AO}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle OAE-|\overrightarrow{AO}||\overrightarrow{AB}|\cdot\cos\angle OAD=|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{AC}|-|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AB}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2-\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2=-6$. 选项 B 正确.

由 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，得 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\mathbf{0}$. 故 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA})+(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GB})+(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GC})=3\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{OG}$ 又由欧拉线定理得 $\overrightarrow{GH}=2\overrightarrow{OG}$，所以 $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$，选项 C 正确.

如图13，由 $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$，可得 $\overrightarrow{MG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{MO}+\frac{1}{3}\overrightarrow{MH}$，即 $\overrightarrow{GM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OM}+\frac{1}{3}\overrightarrow{HM}$，于是 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}=6\overrightarrow{GM}=6\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OM}+\frac{1}{3}\overrightarrow{HM}\right)=4\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{HM}$，选项 D 正确.

综上，选 BCD.

评注 本题以三角形的欧拉线和“欧拉线定理”为背景，考查平面向量的线性运算与数量积运算，考查考生的阅读理解能力、运算求解能力及数形结合思想.

(上接第22页)

当 $n=1,2$ 时，经验证知不等式成立.

综上，得证.

评注 函数放缩法即构造函数，利用函数单调性进行放缩.

六、用二项式定理放缩

例7 已知 $n\in\mathbf{N}^*$，求证:

$$2\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3.$$

证明 由二项式定理，可得 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+C_n^1\frac{1}{n}+C_n^2\left(\frac{1}{n}\right)^2+\cdots\geqslant2$.

又因为 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+C_n^1\frac{1}{n}+C_n^2\left(\frac{1}{n}\right)^2+\cdots+C_n^n\left(\frac{1}{n}\right)^n$，而 $C_n^k\left(\frac{1}{n}\right)^k=\frac{1}{n^k\cdot k!}n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)=\frac{1}{k!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{n-k+1}{n}<\frac{1}{k!}\leqslant\frac{1}{2^{k-1}}$，所以 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}<1+2=3$.

综上，得证.

评注 二项式定理将 n 的指数形式和幂形式结合起来，只取展开式的有限项就建立了不等关系. 常用基本结论有 $2^n>2n+1(n\geqslant3)$，$2^n>n^2+n+2(n\geqslant5)$，$3^n\geqslant2n^2+1(n\geqslant2)$ 等.