基于“一题一课”视角的高三一轮复习课教学策略

刘晓蕾

(山东省滨州实验中学,256600)

摘　要:本文以“直线与椭圆的位置关系”复习课教学为例,从“研究初置,思路铺垫”“一题多问,纵横联系”“一题多变,开拓思维”“逐层递进,探究本质”四个方面阐述了如何在高三一轮复习课中运用“一题一课”的教学方式提高课堂效率,以及如何在复习课教学中提升学生的数学核心素养.

关键词:高中数学;一轮复习课;一题一课;核心素养

当前,高三数学课堂的教学现状是进行反复的“题海式”习题训练,大部分数学课堂呈现出重“教”轻“学”、重“结果”轻“过程”、重“知”轻“能”的现象.[1] 教师在努力地教,学生也在尽力地学,但是收效甚微,高考成绩不尽如人意.对于一些典型问题的处理方法,学生只停留在浅层次的模仿阶段,并未真正理解和掌握.究其原因,很多知识在学生头脑中并未形成一个知识网络,而是孤立的、零散的存在,还有就是教师在讲评时并未让学生的思维融入课堂,没有自己的理解,这样的记忆是短暂的,这就形成了“讲过很多遍,学生却仍然不会”的困境.为了改变当前一轮复习的困境,从“一题一课”视角,以“直线与椭圆的位置关系”复习课为例,谈一谈我的一些做法.

一、“一题一课”的内涵

“一题一课”就是依据高考的核心考点,选择来源于教材的一个典型问题,通过对典型问题深入研究,挖掘其内在的数学本质,通过与这个问题相关的知识间的纵横联系,将孤立问题“串”起来,对这个题目不断进行变式或拓展,完善知识结构、构建方法体系、积累基本活动经验.[2]

“一题一课”的教学方式,继承和发扬了中国基础教育的两大优势,即变式教学与开放题教学.教师从一道题目开始由浅入深地展开变式,有利于学生挖掘问题的本质,逐步理解所要研究的问题;师生共同归纳总结本节课所学知识点,以思维导图的形式呈现,有利于学生对知识体系的构建,加强各知识点之间的联系,提升学习的灵活性.通过对典型问题的思考,进行一题多解,一题多变,培养学生的发散思维,进一步培养学生分析问题、解决问题的能力.因此,“一题一课”对于培养学生的核心素养也能起到举足轻重的作用.[3]

二、教学过程

1.探究初置,思路铺垫

师:直线与圆锥曲线的位置关系是高中数学的重要内容,也是高考的热点问题,解决这类问题需要用到转化与化归、数形结合、代数与方程、分类讨论等数学思想,并且可以发展逻辑推理、直观想象、数学抽象、数学建模等核心素养.因此本节课的内容对提升数学综合能力有着重要的作用.我们先来看一下知识再现题1.

题1　已知直线l:$y=kx-k$和椭圆C:$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(1)判断直线l与椭圆C的位置关系;

(2)当$k=1$时,求椭圆C截直线l的弦长.

生1:直线与椭圆相交.

师:你的解题思路是什么?

生1:联立直线l和椭圆C的方程,消去y得到关于x的一元二次方程$(1+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-4=0$,可求得$\Delta=16(1+3k^2)>0$,所以直线$l$和椭圆$C$相交,有两个交点.

师:这个运算量太大了,还有没有运算量小一点的方法?

生2:我发现直线l:$y=kx-k$过定点$M(1,0)$,而且点M在椭圆C内,过这个点M的直线与椭圆均有两个公共点,因此直线l和椭圆C有两个交点.

师:非常好!直线与圆锥曲线位置关系这类问题的计算量一般都比较大,因此,在运算之前要注意观察几何图形的特点,多从几何角度考虑问题,通过数形结合的思想来解决问题.第(2)问同学们是怎么做的呢?

生3:将$k=1$代入生1得到的一元二次方程,得$3x^2-4x=0$,因此可求得直线l与椭圆C的交点坐标为$(0,-1)$和$(\frac{8}{5},\frac{3}{5})$,进而可求得弦长为$\frac{8\sqrt{2}}{5}$.

师:如果直线$l:y=kx+m$与椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的交点坐标没有办法直接算出来,我们应该如何解决直线相交弦问题?具体的步骤是什么?

生4:设直线l与椭圆C的交点为$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,联立直线l与椭圆C的方程,消掉y,得关于x的一元二次方程$px^2+qx+r=0$,则$x_1+x_2=-\frac{q}{p}$,$x_1x_2=\frac{r}{p}$,代入弦长公式$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$算出.

师:还有其他想法吗?

生5:联立完方程以后应该先计算Δ,判断直线与椭圆的位置关系,既然已经计算出了Δ的值,那弦长公式用$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{\sqrt{\Delta}}{|p|}$,计算量比较小.

师生共同总结出处理直线与椭圆相交时的解题步骤:设元→联立直线与椭圆的方程→消元得一元二次方程→计算Δ→$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{\sqrt{\Delta}}{|p|}$(或写出$x_1+x_2,x_1x_2$→$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$).

【设计意图】弦长问题是直线与圆锥曲线问题的基本题型,很多复杂问题都是在此基础上变化而来,因此,对弦长问题的处理非常关键.通过对课前知识再现题目的师生交流,回顾如何判断直线与椭圆的位置关系,以及在直线与椭圆相交的情况下如何计算弦长,展现本节课的基本知识和基本方法.

2.一题多问,纵横联系

变式1-1　已知直线l过点$(0,2)$,若直线l与椭圆$C:\frac{x^2}{4}+y^2=1$相交,求直线l的斜率k的取值范围.

生6:根据条件,设直线l的方程为$y=kx+2$,代入椭圆方程,消去y得:$(1+4k^2)x^2+16kx+12=0$.令$\Delta=16(4k^2-3)>0$,解得$|k|>\frac{\sqrt{3}}{2}$,此时直线l与椭圆C相交.故斜率k的取值范围是$(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{2})\cup(\frac{\sqrt{3}}{2},+\infty)$.

变式1-2　是否存在直线$l:y=kx-k$与椭圆$C:\frac{x^2}{4}+y^2=1$交于两点(设为A,B),且$|AB|=\sqrt{2}$?若存在,求出此时直线l的方程.

生7:根据上面的步骤,计算可得$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{\sqrt{16(4k^2-3)}}{1+4k^2}$.又$|AB|=\sqrt{2}$,所以$\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{\sqrt{16(4k^2-3)}}{1+4k^2}=\sqrt{2}$,解得$k=\pm\frac{5}{4}$.故存在两条满足条件的直线,它们的方程分别为$5x-4y+8=0$和$5x+4y-8=0$.

变式1-3　已知椭圆$C:\frac{x^2}{4}+y^2=1$,是否存在直线$l:y=kx-k$,它与椭圆C相交于A,B两点,且弦AB的中点M的横坐标为$\sqrt{3}$?

生8:应用前面解决两个问题的部分结果,可以得到$x_1+x_2=-\frac{16k}{1+4k^2}=2\sqrt{3}$,解得$k=-\frac{\sqrt{3}}{2}$或$k=-\frac{\sqrt{3}}{6}$,但这两个值均不符合$|k|>\frac{\sqrt{3}}{2}$.因此,不存在满足条件的直线$l$.

【设计意图】直线与椭圆位置关系的判断、弦长问题、中点弦问题是一脉相成的,在同一个问题情境下解决这三个问题,增强了知识之间的联系,逐渐加强问题的思维量,减少因联立带来的运算量,提高了课堂效率.

3.一题多变,开拓思维

变式2-1　已知直线l过点$(0,2)$,且与椭圆$C:\frac{x^2}{4}+y^2=1$交于A,B两点,当$\angle AOB$为锐角时,求直线l的斜率k的取值范围.

师:解决这个问题的关键是什么?

生:我认为是"$\angle AOB$为锐角"如何表示?

师:非常好,那么"$\angle AOB$为锐角"可以如何表示呢?如何把这个几何条件转化成我们熟悉的代数关系?怎么跟上面我们研究的问题联系起来?

生9:我觉得可以用余弦定理$\cos\angle AOB=\frac{|OA|^2+|OB|^2-|AB|^2}{2|OA|\cdot|OB|}>0$.

师:可以想象,利用这个代数关系计算量会很大,还有没有其他表示"$\angle AOB$为锐角"的代数关系?

生10:可以考虑$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}>0$,这样就可以把几何条件"$\angle AOB$为锐角"转化为代数关系$x_1x_2+y_1y_2>0$,利用直线方程$y=kx+2$,得$x_1x_2+y_1y_2=(1+k^2)x_1x_2+2k(x_1+x_2)+4$,由前面得到的一

元二次方程,可求得 x_1+x_2,x_1x_2,将其代入得$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{16-4k^2}{1+4k^2}$,由$\frac{16-4k^2}{1+4k^2}>0$,解得 $-2<k<2$.又由直线 l 与椭圆 C 相交得 $|k|>\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 k 的取值范围为$(-2,-\frac{\sqrt{3}}{2})\cup(\frac{\sqrt{3}}{2},2)$.

师:很好!这位同学特别注意到了 $|k|>\frac{\sqrt{3}}{2}$ 这个隐含条件(因为直线与椭圆相交),考虑问题很全面.如果现在我们把条件"$\angle AOB$ 为锐角"变为"$\angle AOB$ 为钝角",又会如何呢?

变式2-2　已知直线 l 过点$(0,2)$,且与椭圆 C:$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 交于 A,B 两点,当 $\angle AOB$ 为钝角时,求直线 l 的斜率 k 的取值范围.

生11:将几何条件"$\angle AOB$ 为钝角"转化为代数关系$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}<0$,再加上直线与椭圆相交,得到 $k\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.

师:现在同学们"化形为数"运用得已经很熟练了.那继续来看接下来的这个问题.

变式2-3　已知直线 l 过点$(0,2)$,且与椭圆 C:$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 交于 A,B 两点,若以 AB 为直径的圆刚好经过原点,求直线 l 的方程.

师:解决这个问题的关键是什么?

生12:几何条件"以 AB 为直径的圆刚好经过原点"如何转化为代数关系.

师:同学们已经有很强的"化形为数"的意识了,这个几何条件说明什么呢?

生13:我们可以表示出圆的方程,然后将原点的坐标代入这个方程.

师:这可能是大部分同学的想法,但是可以预见这种思路的计算量会很大,有其他想法吗?

生14:因为 AB 是圆的直径,且原点 O 在圆上,所以有 $OA\perp OB$,根据上面的数据可得$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{16-4k^2}{1+4k^2}=0$,解得 $k=2$ 或 $k=-2$.

师:这位同学看到了 $\angle AOB$ 是直角的本质,那如果让你们把上边的变式2-1和2-2改一下,让这道题目看起来"高大上"一点,可以怎么设计问题?

生15:变式2-1可以改为"原点 O 在以 AB 为直径的圆外,求斜率 k 的取值范围".类似地,变式2-2可以改为"原点 O 在以 AB 为直径的圆内,求斜率 k 的取值范围".

师:非常好,看来同学们已经明白这个问题的本质了.现在来看下面这个问题,该怎么处理呢?

变式2-4　已知直线 l 过点$(0,2)$,且与椭圆 C:$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 交于 A,B 两点,若点 E 在直线 OA 上,点 F 在直线 OB 上,以 EF 为直径的圆刚好经过原点,求直线 l 的方程.

师:解决这个问题的关键是什么?

生16:根据变式2-3,将几何条件"以 EF 为直径的圆刚好经过原点"转化为代数关系$\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OF}=0$.

师:但是点 E、F 的坐标怎么表示呢?

生17:根据条件,可设$\overrightarrow{OE}=\lambda\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OF}=\mu\overrightarrow{OB}$,利用这个关系用 A,B 两点的坐标来表示 E,F 两点的坐标,可得 $x_E=\lambda x_1$,$y_E=\lambda y_1$,$x_F=\mu x_2$,$y_F=\mu y_2$,则$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{OH}=x_Gx_H+y_Gy_H=\lambda\mu(x_1x_2+y_1y_2)=0$,通过这种转化,剩下的过程就跟变式2-3完全一样了,这样的结果也完全一样,$k=2$ 或 $k=-2$.

师:直线与椭圆相交时,除了可以解决弦长问题、中点弦问题,还有什么问题经常会遇到?

生:三角形的面积问题.

变式2-5　已知直线 l 过点$(0,2)$,且与椭圆 C:$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 交于 A,B 两点,用 k 表示 $S_{\triangle OAB}$.

生18:先求出弦长 AB 的长度,根据前面的运算结果可得 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{\sqrt{16(4k^2-3)}}{1+4k^2}$,又点 O 到直线 l 的距离 $d=\frac{2}{\sqrt{1+k^2}}$,则

$$\begin{aligned}S_{\triangle OAB}&=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot d\\&=\frac{1}{2}\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{\sqrt{16(4k^2-3)}}{1+4k^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{1+k^2}}\\&=\frac{4\sqrt{4k^2-3}}{1+4k^2}.\end{aligned}$$

师:很好,思路很清晰!除了可以用这种方式来表示 $S_{\triangle OAB}$ 之外,还有其他方式来表示吗?能否从图形角度来考虑一下?

生19:如图1所示,设 $P(0,2)$,则 $S_{\triangle OAB}=S_{\triangle OBP}-S_{\triangle OAP}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot|x_1-x_2|$,将由韦达定理得到的 x_1+x_2,x_1x_2 代入,也可以整理出来.

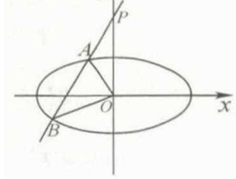

图1

师:非常好!先分析图形的几何特征,再用代数关系代换几何条件,这样数形结

合的方式可以简化运算.

【设计意图】由一个"母题"出发,由浅入深地展开变式,变式问题层层深入,达到"通过解一道题最终会解一类题"的目的.引导学生抓住解析几何的主线"几何问题代数化",将题目中的几何条件转化为代数关系,领略转化与化归、数形结合等数学思想,进一步发展学生的逻辑推理素养、直观想象素养.

4.逐层递进,探究本质

变式3-1　已知直线$l:y=kx+m$与椭圆$C:\frac{x^2}{4}+y^2=1$交于A,B两点,且$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-1$,证明:直线$l$恒过定点.

师:解决这个问题的关键是什么?

生20:关键条件是$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-1$.

师:说一下你的具体解题过程?

生20:根据前面的经验来看,$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=-1$,又因为$y_1=kx_1+m,y_2=kx_2+m$,代入整理得

$$(1+k^2)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2+1=0.①$$

联立直线l和椭圆C的方程,消元得$(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-4=0$,所以$x_1+x_2=-\frac{8km}{1+4k^2}$,$x_1x_2=\frac{4m^2-4}{1+4k^2}$,代入①,整理得$5m^2-3=0$,解得$m=\pm\frac{\sqrt{15}}{5}$.

所以直线l过定点$(0,\frac{\sqrt{15}}{5})$或$(0,-\frac{\sqrt{15}}{5})$.

师:看得出来,你对这个问题分析得很透彻,思路很清晰,有效利用已有的学习成果,成功解决了直线过定点问题.定值定点问题一直是高考的热点问题,现在我们再添加一个条件,看一下变式3-2.

变式3-2　已知直线$l:y=kx+m$与椭圆$C:\frac{x^2}{4}+y^2=1$交于A,B两点,若$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-1$,且$OD\perp AB$,$D$为垂足,证明:存在定点$Q$,使得$|DQ|$为定值.

师:如何将题目中的几何条件转化为代数关系?

生21:设变式3-1中得到的定点为$P(0,\pm\frac{\sqrt{15}}{5})$,根据变式2-3给我的启发,由几何条件$OD\perp AB$可知动点$D$在以$OP$为直径的圆上,当点$Q$为$OP$的中点(即圆心)时,$|DQ|$为定值,即为圆的半径$\frac{\sqrt{15}}{10}$.

师:这位同学对本节课内容的前后联系做的很到位,将形化为数,同时从数出发来研究图形的能力也很棒.不知不觉中我们已经把2020年新高考Ⅰ卷的第22题(压轴题)给变出来了,请看:

已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$,且过点$A(2,1)$.(1)求$C$的方程;(2)点$M,N$在$C$上,且为$AM\perp AN,AD\perp MN$,$D$为垂足.证明:存在定点$Q$,使得$|DQ|$为定值.

【设计意图】通过分析条件和结论的内在联系,拾级而上,通过一级级的变式,最终变出了高考题.让学生明白,高考题来源于平时,不能小看教材上每一道看似不起眼的题目.

三、教学反思

1.明确目标,精选例题

本节课的复习目标是让学生明确直线与椭圆的位置关系,以及如何利用直线与椭圆的位置关系来解决一些问题,所以选取例题的时候就以此为中心,将此目标融入选取的例题中.例题最好以教材中的例题或者习题为蓝本,在学生的认知范围内,适度拓展其内涵和外延,有效发挥教材习题的功能和价值,拓宽学生的视野.

2.回归本源,深入浅出

本节课内容的生长点就是"如何判断直线与椭圆的位置关系",以此知识点出发,进一步添加条件,逐步延伸到了两道高考题.对本源知识的掌握,记忆与理解知识是比较初级的要求,更难的是要从一个复杂问题中挖掘出其本质性的东西并灵活应用.这就需要教师在日常教学中将一些复杂问题拆分成简洁的本源性知识,逐渐使学生形成自己的难题分解思维路径,进而提升解决问题的能力.

3.适度变式,举一反三

适当的变式教学能提高教学的有效性,拓展学生的思维,但是也要注意,"一题一课"不是为了变式而变式,要根据学生学习的需要,遵循学生的认知规律设计变式.变式的设计要巧,准确把握变式的"度",以高考为导向,适当增加或者删减条件,不要过难,打击学生的自信,削弱他们的学习积极性.

4.观察思考,深度学习

《普通高中数学课程标准(2017年版)》明确指出:"数学教育帮助学生掌握现代生活和进一步学习所必需的数学知识、技能、思想和方法;提升学生的数学素养,引导学生会用数学眼光观察世界,会用数

学思维思考世界，会用数学语言表达世界；促进学生思维能力、实践能力和创新意识的发展.”高三数学复习要以发展学生的核心素养为目的进行设计，在学生主动接受知识的状态下才能让素养落到实处.本节课从一个学生比较熟悉的知识入手，通过不断地改变条件，让学生一直处于研究的状态，而不是被动地接受，通过引导学生深入思考达成对数学本质、思想方法和价值的领悟.建构主义认为：“学习要放在活动中进行建构，只有在活动过程中不断地进行反省、概括和抽象，重构自己的理解，才能真正理解知识的本质.”

参考文献：

[1] 张文海.“一题一课”：让高三数学复习走向素养落实[J].数学通报，2020(59)：30-33.

[2] 刘国祥.一题一课：落实整体教学观的智慧——以2021年新高考一卷第21题设计为例[J].中学数学月刊，2021(11)：38-41.

[3] 赵振华.高中数学“一题一课”教学模式在复习课中的应用研究[J].数学学习与研究，2021(17)：24-25.

（收稿日期：2022－11－20）

我为高考设计题目

题414 已知 $a>0$，函数 $f(x)=1-\frac{1}{x}-a\ln x$，$g(x)=a(1-\mathrm{e}^{1-x})-x+1$ 有相同的最大值.

(1) 求 a 的值；

(2) 证明：$(x-1)(1-\frac{1}{x})\geqslant a^2(1-\mathrm{e}^{1-x})\cdot\ln x$.

解 (1) $f'(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{a}{x}=\frac{1-ax}{x^2}$，$x>0$.当 $0<x<\frac{1}{a}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x>\frac{1}{a}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，所以，当 $x=\frac{1}{a}$ 时，$f(x)$ 取得最大值 $1-a+a\ln a$.

$g'(x)=a\mathrm{e}^{1-x}-1$，当 $x<1+\ln a$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；当 $x>1+\ln a$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，所以，当 $x=1+\ln a$ 时，$g(x)$ 取得最大值 $a-1-\ln a$.

依题意，有 $1-a+a\ln a=a-1-\ln a$，所以

$$2a-2-\ln a-a\ln a=0. \quad ①$$

令 $h(x)=2x-2-\ln x-x\ln x$，$x>0$，则

$$h'(x=2-\frac{1}{x}-(\ln x+1)=1-\frac{1}{x}-\ln x.$$

由 $f(x)$ 的单调性可知，当 $a=1$ 时，$f(x)=1-\frac{1}{x}-\ln x$ 在 $x=1$ 时取得最大值0，即 $f(x)\leqslant 0$，从而可得 $h'(x)=1-\frac{1}{x}-\ln x\leqslant 0$，因此 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $h(1)=0$，由①式得 $a=1$.

(2) 由(1)知，即证：

$$(x-1)(1-\frac{1}{x})\geqslant(1-\mathrm{e}^{1-x})\cdot\ln x. \quad ②$$

显然，当 $x=1$ 时②式成立.

当 $x>0$ 且 $x\neq 1$ 时，易知 $(1-\frac{1}{x})(1-\mathrm{e}^{1-x})>0$，所以，要证不等式②，只需证 $\frac{\ln x}{1-\frac{1}{x}}\leqslant\frac{x-1}{1-\mathrm{e}^{1-x}}$，

即证：

$$\frac{\ln\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\leqslant\frac{\ln\mathrm{e}^{1-x}}{1-\mathrm{e}^{1-x}}. \quad ③$$

令 $p(x)=\frac{\ln x}{1-x}$，$x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$，则

$$p'(x)=\frac{\frac{1}{x}+\ln x-1}{(1-x)^2}.$$

由(1)知，$1-\frac{1}{x}-\ln x\leqslant 0$，则 $\frac{1}{x}+\ln x-1\geqslant 0$，等号当且仅当 $x=1$ 时成立，所以 $p'(x)>0$，由此可得，$p(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 上都单调递增.

由 $1-\frac{1}{x}-\ln x\leqslant 0$ 得 $1-\frac{1}{x}\leqslant\ln x$，即 $\ln\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{x}-1$，等号当且仅当 $x=1$ 时成立，从而可得 $\ln x\leqslant$