

课堂因设计而精彩

—— 一节高三一轮复习课的教学设计与思考

李红春

龚大晖

(武汉市黄陂区第一中学盘龙校区, 430312) (武汉市江岸区中学教研室, 430016)

1. 问题提出

圆锥曲线中的综合问题是高考的重点和热点, 学生在选修 2-1 的学习过程中对各类题型有过初步的接触, 但对问题的认识还停留于表面, 计算能力欠缺, 攻克解析几何综合题的信心不足. 究其原因, 笔者发现, 当下不少学校在解析几何的复习中存在的普遍现象就是: 脱离教材, 题海战术, 大题量, 快节奏, 教师多半讲授的是“投机取巧的实战经验”, 导致的结果往往是: 学生审题不清, 本源不明, 解题无序, 推论无理; 算理不存; 教师教得累, 学生学得苦.

为了提升教师的思想认识, 不断优化教学行为, 前不久, 笔者受武汉市江岸区教研室邀请, 围绕解析几何综合问题上了一节高三一轮复习展示课, 深受好评. 本文将这一节课的教学过程和笔者的思考展现出来, 希望对大家的教学有所启发.

2. 教学设计展示

2.1 教学目标

(1) 学会从不同角度分析几何量变化间的关系, 树立辩证思维; 在不同方法的比较中体会解决定点问题的基本方法.

(2) 立足几何直观, 经历运算求解过程, 渗透数形结合的思想, 促进直观想象、数学运算等核心素养的提升.

(3) 通过对课本习题的研读与思考, 并利用结论优化解题过程, 激发学生的学习兴趣, 树立攻破压轴试题的信心, 帮助学生树立正确的课本观, 学会学习.

2.2 教学重难点

教学重点: 体会解析几何中的辩证思维, 领悟求解定点问题的一般方法.

教学难点: 对教材例题的研究和拓展, 由此抽象出基本模型.

2.3 教学过程

授课对象为普通班的学生, 本节课采用的是“小组合作, 先学再交, 先练再讲”授课模式, 课前教师已将例题 1(如下) 让学生提前进行了思考.

例题 1 如图 1, 椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的左顶点

为 A , 过原点 O 的直线(与坐标轴不重合)与椭圆 C 交于 P, Q 两点, 直线 PA, QA 分别与 y 轴交于 M, N 两点, 试问以 MN 为直径的圆是否过定点? 证明你的结论?

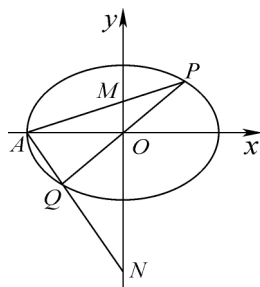


图 1

2.3.1 解法探讨

上课开始, 教师巡视课堂, 收集不同解法, 通过投影仪展示出来.

法 1 设直线 AP 的方程为 $y = k(x+2)$, 代入椭圆方程得

$$(2k^2 + 1)x^2 + 8k^2x + 8k^2 - 4 = 0.$$

显然 $\Delta > 0$, 由韦达定理得 $x_A \cdot x_P = \frac{8k^2 - 4}{2k^2 + 1}$,

又 $x_A = -2$, 故 $x_P = \frac{2 - 4k^2}{2k^2 + 1}$, 则 $y_P = k(x_P + 2) =$

$\frac{4k}{2k^2 + 1}$, 即 $P(\frac{2 - 4k^2}{2k^2 + 1}, \frac{4k}{2k^2 + 1})$, 则 $Q(\frac{2 - 4k^2}{2k^2 + 1},$

$\frac{-4k}{2k^2 + 1})$, 于是 $k_{AQ} = \frac{y_Q - y_A}{x_Q - x_A} = -\frac{1}{2k}$, 所以直线 AQ

的方程为: $y = -\frac{1}{2k}(x+2)$, 则 $N(0, -\frac{1}{k})$.

又易得 $M(0, 2k)$, 则以 MN 为直径的圆的方程为 $x^2 + (y - 2k)(y + \frac{1}{k}) = 0$, 即

$$x^2 + y^2 + (\frac{1}{k} - 2k)y - 2 = 0 \quad ①$$

若圆过定点, 则 ① 式对变量 k 恒成立, 故

$$\begin{cases} y = 0, \\ x^2 + y^2 - 2 = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x = \pm\sqrt{2}, \\ y = 0, \end{cases}$$

故圆过定点 $(\pm\sqrt{2}, 0)$.

法 2 不妨设直线 PQ 的方程为 $y = kx (k > 0)$, 联立椭圆方程得 $(2k^2 + 1)x^2 = 4$, 解之得 $x = \pm \frac{2}{\sqrt{2k^2 + 1}}$, 易得 $P(\frac{2}{\sqrt{2k^2 + 1}}, \frac{2k}{\sqrt{2k^2 + 1}})$, $Q(\frac{-2}{\sqrt{2k^2 + 1}}, \frac{-2k}{\sqrt{2k^2 + 1}})$, 则直线 PA 的方程为 $y = \frac{k}{1 + \sqrt{2k^2 + 1}}(x + 2)$, 令 $x = 0$ 得 $y = \frac{2k}{1 + \sqrt{2k^2 + 1}}$, 则 $M(0, \frac{2k}{1 + \sqrt{2k^2 + 1}})$.

同理可得 $N(0, \frac{2k}{1 - \sqrt{2k^2 + 1}})$, 于是圆的方程为 $x^2 + (y - \frac{2k}{1 + \sqrt{2k^2 + 1}})(y - \frac{2k}{1 - \sqrt{2k^2 + 1}}) = 0$, 整理得:

$$x^2 + y^2 + \frac{2}{k}y - 2 = 0 \quad (2)$$

若圆过定点, 则 (2) 式对变量 k 恒成立, 故

$$\begin{cases} y = 0, \\ x^2 + y^2 - 2 = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x = \pm\sqrt{2}, \\ y = 0, \end{cases}$$

故圆过定点 $(\pm\sqrt{2}, 0)$.

法 3 设 $M(0, m)$, 由 $A(-2, 0)$, 则直线 AM 的方程为 $y = \frac{m}{2}(x + 2)$, 联立椭圆方程得:

$$(m^2 + 2)x^2 + 4mx + 4m^2 - 8 = 0,$$

由 $\Delta > 0$, 结合韦达定理得 $x_A \cdot x_P = \frac{4m^2 - 8}{m^2 + 2}$,

于是 $x_P = \frac{2m^2 - 4}{m^2 + 2}$, 则 $y_P = \frac{m}{2}(x_P + 2) = \frac{4m}{m^2 + 2}$,

即 $P(\frac{2m^2 - 4}{m^2 + 2}, \frac{4m}{m^2 + 2})$, 则 $Q(-\frac{2m^2 - 4}{m^2 + 2}, -\frac{4m}{m^2 + 2})$,

于是 $k_{AQ} = \frac{y_Q - y_A}{x_Q - x_A} = -\frac{1}{m}$, 所以直线 AQ 的方程为:

$y = -\frac{1}{m}(x + 2)$, 则 $N(0, -\frac{2}{m})$. 则以 MN 为直径的

圆的方程为 $x^2 + (y - m)(y + \frac{2}{m}) = 0$, 即

$$x^2 + y^2 + (\frac{2}{m} - m)y - 2 = 0 \quad (3)$$

若圆过定点, 则 (3) 式对变量 m 恒成立, 故

$$\begin{cases} y = 0, \\ x^2 + y^2 - 2 = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x = \pm\sqrt{2}, \\ y = 0, \end{cases}$$

故圆过定点 $(\pm\sqrt{2}, 0)$.

法 4 设 $P(m, n)$, 则 $Q(-m, -n)$, 则直线 AP

的方程为 $y = \frac{n}{m + 2}(x + 2)$, 令 $x = 0$, 得 $y =$

$$\frac{2n}{m + 2}, \text{ 即 } M(0, \frac{2n}{m + 2}).$$

同理直线 AQ 的方程为 $y = \frac{n}{m - 2}(x + 2)$, 可得

$N(0, \frac{2n}{m - 2})$, 则以 MN 为直径的圆的方程为: $x^2 +$

$(y - \frac{2n}{m + 2})(y - \frac{2n}{m - 2}) = 0$. 结合 $\frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{2} = 1$, 圆的方程可化简为:

$$x^2 + y^2 - \frac{4mn}{m^2 - 4}y - 2 = 0 \quad (4)$$

若圆过定点, 则 (4) 式对变量 m, n 恒成立, 故

$$\begin{cases} y = 0, \\ x^2 + y^2 - 2 = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x = \pm\sqrt{2}, \\ y = 0, \end{cases}$$

故圆过定点 $(\pm\sqrt{2}, 0)$.

问题 1 从对已知条件的利用视角出发, 比较以上四种解法的异同.

对于如何利用 P 点在椭圆上这一关键条件, 解法 1 和解法 3 都是将直线和椭圆联立起来, 借助韦达定理求解; 解法 2 中设出的直线由于过椭圆的中心, 采取直接联立求出交点, 反而简单; 解法 4 直接设出坐标, 最后借助方程消参. 前 3 种解法都有将直线方程和椭圆联立后消元的过程, 计算量大, 第 4 种方法没有这一环节, 相对简单.

设计目的 解析几何的难点之一就是不会合理转化, 题目条件的利用角度很重要, 小组合作能取长补短, 集思广益; 一题多解能开阔学生的思维, 让彼此在不同的方法和比较中看到优劣, 学会选择.

2.3.2 深化理解

问题 2 下面是以上四种解法的思维流程(如图 2), 概括出四种解法的共性?

法1: 设 $k_{AP} \rightarrow M, P \rightarrow Q, N \rightarrow$ 圆 $\rightarrow$ 定点

法2: 设 $k_{PQ} \rightarrow P, A \rightarrow$ 直线 $AP, AQ \rightarrow M, N \rightarrow$ 圆 $\rightarrow$ 定点

法3: 设 $M(0, m) \rightarrow P, Q \rightarrow$ 直线 $AQ \rightarrow N \rightarrow$ 圆 $\rightarrow$ 定点

法4: 设 $P(m, n) \rightarrow Q, M \rightarrow N \rightarrow$ 圆 $\rightarrow$ 定点

图 2

都是通过引入参数, 进而从不同的角度来表述刻画题目中的数量和位置关系, 得出 M, N 两点坐标后, 再用含有参数的等式表示圆的方程, 最后都将问题转化为恒成立问题.

问题 3 如图 3, 从代数的角度分析, 你认为本题中圆过定点的本质是什么?

法 1: 选直线 AP 的斜率 k 为变量; 圆的方程: $x^2 + y^2 + (\frac{1}{k} - 2k)y - 2 = 0$.

法 2: 选直线 PQ 的斜率 k 为变量; 圆的方程: $x^2 + y^2 + \frac{2}{k}y - 2 = 0$.

法 3: 选点 M 的坐标 $(0, m)$ 为变量; 圆的方程: $x^2 + y^2 + (\frac{2}{m} - m)y - 2 = 0$.

法 4: 选点 P 的坐标 (m, n) 为变量; 圆的方程: $x^2 + y^2 - \frac{4mn}{m^2 - 4}y - 2 = 0$.

图 3

圆过定点则表示存在一对有序实数 (x, y) 代入圆的方程恒成立, 即等式的成立与参数的取值无关.

设计目的 四种解法引入的参数不同, 源于对“引发运动变化的原因”有着不同的视角, 图形中涉及的点线位置关系相互联系, 牵一发而动全身, 问题 1 的设计在于引导学生从不同的角度分析问题, 树立辩证思维, 培养思维的灵活性; 问题 2 的设计有助于学生对解析几何中定点问题本质的理解: 即将几何问题代数化, 进而将问题转化为恒成立问题.

2.3.3 数学探究

问题 4 阅读课本选修 2-1 第 41 页例 3 (如图 4), 能否将结论推广到一般, 逆命题是否成立?

例 3 如图 2.2-6, 设点 A, B 的坐标分别为 $(-5, 0), (5, 0)$, 直线 AM, BM 相交于点 M , 且它们的斜率之积是 $-\frac{4}{9}$, 求点 M 的轨迹方程.

分析: 设点 M 的坐标为 (x, y) , 那么直线 AM, BM 的斜率就可以用含 x, y 的式子表示. 由于直线 AM, BM 的斜率之积是 $-\frac{4}{9}$, 因此可以建立 x, y 之间的关系式, 得出点

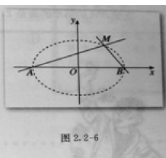


图 4

结论 1 平面内到两定点连线斜率之积为定值 (不等于 -1 的负数) 的动点轨迹为椭圆.

结论 2 椭圆上的一点与椭圆长轴两端点连线斜率之积为定值.

问题 5 若 AB 为过椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 中心的任意一条弦, M 为椭圆上异于 A, B 的任意一点, 则直线 MA, MB 的斜率之积是否为定值?

解 设 $M(x_0, y_0), A(x_1, y_1)$, 则 $B(-x_1, -y_1)$, 于是 $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1, \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$, 两式相减得 $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 0$, 即 $\frac{x_0^2 - x_1^2}{a^2} = -\frac{y_0^2 - y_1^2}{b^2}$, 则

$$k_{MA} \cdot k_{MB} = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{y_0 + y_1}{x_0 + x_1} = \frac{y_0^2 - y_1^2}{x_0^2 - x_1^2} = -\frac{b^2}{a^2}.$$

结论 3 若 AB 为过椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 中心的任意一条弦, M 为椭圆上异于 A, B 的任意一点, 则直线 MA, MB 的斜率之积为定值 $-\frac{b^2}{a^2}$.

设计目的 通过对课本例题结论的拓展, 抽象出基本图形, 得出基本结论. 在教给学生探究问题的方法基础上, 引导学生进行数学探究活动, 培养思维的深刻性, 激发学生学习数学的兴趣.

2.3.4 学以致用

问题 6 从图形中观察, 例题 1 与课本例题有什么联系?

都有一条通过椭圆中心的弦, 都有椭圆上另外一点与弦的两端点连接着.

问题 7 能否借助结论 3 快速对例题给出解答?

设直线 AP 的方程为 $y = k_1(x+2)$, 令 $x = 0$, 得 $M(0, 2k_1)$. 设直线 AQ 的方程为 $y = k_2(x+2)$, 令 $x = 0$, 得 $N(0, 2k_2)$. 则以 MN 为直径的圆的方程为 $x^2 + (y - 2k_1)(y - 2k_2) = 0$.

由结论 3 知 $k_1 k_2 = -\frac{b^2}{a^2} = -\frac{1}{2}$, 则圆的方程可以简化为

$$x^2 + y^2 - 2(k_1 + k_2)y - 2 = 0 \quad (5)$$

若圆过定点, 则 (5) 式对变量 k_1, k_2 恒成立, 故

$$\begin{cases} y = 0, \\ x^2 + y^2 - 2 = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x = \pm\sqrt{2}, \\ y = 0, \end{cases}$$

故圆过定点 $(\pm\sqrt{2}, 0)$.

问题 8 给出下列试题的简解:

(2011 年江苏高考) 如图 5, 在平面直角坐标系 xOy 中, 过坐标原点的动直线交椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 于 P, A 两点, 其中 P 在第一象限, 过 P 点作 x 轴的垂线, 垂足为 C , 连接 AC 并延长交椭圆于点 B , 若直线 PA 的斜率为正, 求证: $PA \perp PB$.

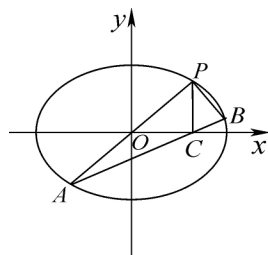


图 5

证明 设 $P(x_0, y_0)$,

则 $A(-x_0, y_0), C(x_0, 0)$, 那么 $k_{PA} = \frac{y_0}{x_0}, k_{AB} = \frac{y_0}{2x_0}$,

而由结论 3 知 $k_{AB} k_{PB} = -\frac{b^2}{a^2} = -\frac{1}{2}$, 所以

$$k_{PA} k_{PB} = k_{PA} \cdot \left(-\frac{1}{2k_{AB}}\right) = \frac{y_0}{x_0} \cdot \left(-\frac{x_0}{y_0}\right) = -1,$$

所以 $PA \perp PB$.

设计目的 引导学生抓住基本图形, 站在结论的基础上审视问题, 例题 1 和江苏高考试题的解法便能“一眼望穿”, 既能激发学生学习的兴趣, 又有助于学生克服解析几何中的畏难情绪. 通过展示课

本例题的潜在价值,帮助学生树立正确的课本观.

2.4 课堂总结

问题 9 请同学们从知识、方法、数学思想等方面说说本节课你有哪些收获?并结合本节课的学习说说一轮复习中要注意哪些问题?

设计目的 让学生对一节课的教学内容有整体认识和感悟,培养学生及时归纳、总结和反思的习惯,通过对学习过程的回顾,让学生体会到课本在复习过程中的价值,引导学生形成科学的学习方法.

2.5 课后巩固

练习 1:椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 过点 $P(0, 1)$ 的动直线 l 与椭圆交于 A, B 两点, 当直线 l 平行于 x 轴时, 直线 l 被椭圆截得的弦长为 $2\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 在平面直角坐标系 xOy 中, 是否存在与点 P 不同的定点 Q 使得 $\frac{|QA|}{|QB|} = \frac{|PA|}{|PB|}$ 恒成立? 若存在, 求出 Q 点的坐标; 若不存在, 说明理由.

练习 2: (2012 年湖北高考题) 过原点且斜率为 k 的直线交曲线 $C: x^2 + \frac{y^2}{m^2} = 1 (m > 0 \text{ 且 } m \neq 1)$ 于 P, Q 两点, 其中 P 在第一象限, 它在 y 轴上的射影为点 N , 直线 QN 交曲线 C 于另一点 H , 是否存在 m , 使得对任意的 $k > 0$, 都有 $PQ \perp PH$? 若存在, 求 m 的值; 不存在, 说明理由.

练习 3: 若 M 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上任意一点, MA, MB 为椭圆上任意两条弦, 且满足斜率之积 $k_{MA} \cdot k_{MB} = -\frac{b^2}{a^2}$, 试判断直线 AB 是否过椭圆的中心?

设计目的 设计练习 1 的目的在于巩固定点问题的基本解法; 练习 2 意在强化“基本图形”中的结论在解题中的应用; 练习 3 则是进一步将课本例题的探究价值引向深入, 激发学生的探究精神. 层层递进, 让学有余力的学生思维能得到进一步的发展.

3. 教学思考

授课结束后, 现场的专家和老師对本节课给予了充分的好评, 他们觉得有如下几个方面的亮点值得广大一线教师借鉴和思考.

(1) 重视解法规律的提炼和问题本质的揭示, 注重深度理解, 促进核心素养的提升.

本节课, 教师从学生的解法中选出了四种有代表性的解法在课堂上先进行展示, 既有助于教师了解学情, 又有助于熟悉通法, 巩固基础. 学习数学的目的是发展数学思维, 要求学生学会用数学的眼光观察现实世界, 用数学的方法思考世界, 用数学的语言表达世界. 数学的眼光, 首先是树立“变化”和“联系”的辩证思维, 其次是学习抽象概括, 本节课学生的四种不同引入参数的解题方法, 恰好体现了从不同角度解决问题的辩证思维. 借助抽象概括, 学生在四种不同解法的比较中挖掘出异同点和一般规律, 并揭示出定点问题的本质, 促进了学生的深度理解; 学生从课本例题中挖掘出斜率之积模型, 并能用它简化问题的解答, 这正好是用数学模型解决问题的体现.

(2) 对课本例题进行变式、拓展和运用, 凸显了课本在高考复习中的重要地位.

教材所选例题、习题都是历经长期打磨、检验, 具有典型的代表性、丰富的内涵性、高质的推广性、广泛的应用性, 它们既是专家命题的抓手, 也是高考命题的源泉, 很多教师对此的认识只停留在口头, 本节课, 教师将课本例题有机植入, 引导学生进行探究和拓展, 抽象出基本模型, 并借此巧妙解决问题, 对培养学生发现问题、解决问题的能力以及抽象思维能力大有裨益.

(3) 将高考真题作为课堂教学的素材, 在问题的解决中帮助学生树立了成功的信心.

高考试题是命题专家精心设计的结果, 往往有一定的深度和区分度, 长期以来, 学生面对解析几何解答题往往心存畏惧, 课堂上教师有意识引入高考试题作为素材, 让学生在成功解决问题的过程中拥有“获得感”, 不断树立破解几何综合问题的信心.

(4) 课后练习的设计独具匠心, 具有层次性, 让不同水平的学生都有发展.

课堂只是学生学习过程中的一个重要环节, 学生的数学思维不能因为下课而中断, 课后练习的设计尤为重要, 而这一点往往被不少教师所忽视. 本节课, 教师精心设计的三个练习题包含: 一般通法的求解, 模型化的巧解, 开放性的探究性问题, 具有层次性, 让不同能力水平的学生都能有所发展.

本节课用到的例题、习题和课本中的素材并不新鲜, 但课堂教学活动中依然能迸发出精彩的火花, 给了我深深的启发, 课堂教学贵在设计, 同样的素材, 不同的处理, 课堂因设计而精彩!

(收稿日期: 2019-01-27)