

基于“问题导学”的高三一轮复习课

——以《椭圆的概念》为例

广西南宁市第三中学 蓝日更

摘要：如何上好高三数学复习课成为众多高三一线教师最为关注的问题。本文，笔者在经过一年多的学习《“问题导学”教学法》之后，结合2019年3月2、3日在南宁市第三中学举行的《关于举办普通高中“学科核心素养评价技术实践研修班”》活动中听了云南师大附中白涛老师上的两节高三复习课，我受益匪浅，对我的触动很大。笔者就以高三一轮复习课《椭圆的概念》教学为例，阐述高中数学“问题导学”指导下进行的高三复习课的教学设计，并在实践中进行总结反思、提升自我。

关键词：问题导学；高三复习；圆锥曲线

当前，高中的数学课堂教学改革，各地都进行得轰轰烈烈、各式各样，很难用一个统一的尺度去加以评价。但笔者通过自己的亲身体验，认为我校黄河清校长的《“问题导学”教学法》对我的触动最大、感触最深。两千多年前伟大教育家孔子提出了与当今素质教育原则相对应的“启发式”教学中就已经就有“诘问”的启发方式。即课堂教学中如何设置问题？才具有针对性。《“问题导学”教学法》一书中指出，数学复习课堂教学模式是将教学过程结构分为四个环节：知识回顾—自主建构—应用探索—总结归纳。

2019年1月3日在南宁三中青山校区听了数学特级教师黎承忠老师和1月11日在南宁三中五象校区听了韦艳君老师上的《参数方程》——章节复习课。课后，黄校长在点评中也指出：复习课的关键是要处理好两个基本问题：知识回顾与知识联系。知识回顾：这一环节注重解决一下三个方面的问题：

- (1) 问题设置。根据高中数学“问题导学”教学法的关联性原则，问题的提出要有启发学生进行“回顾”。
- (2) 能激发学生展开联想、类比、总结。
- (3) 能引导学生学会联系、整合。

下面笔者以高三第一轮复习《椭圆概念》的为例进行分析，不妥之处，请各位同仁多多包涵。

一、回顾知识

(一) 加深对椭圆概念本质属性的理解

问题1：我们的教材是如何给椭圆下定义的？你能否分别用文字语言、数学语言和图形语言表示出来？

设计意图：回顾椭圆定义，强化本质特征，掌握不同语言的相互转换。

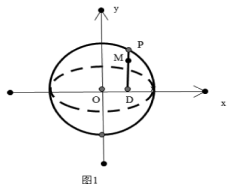


图1

问题2：定义中为何要规定 $2a > |F_1F_2|$ ？如果 $2a = |F_1F_2|$ ， $2a < |F_1F_2|$ ，点的轨迹又是什么？人教A版《数学》（选修2—1）第49页习题2.2A组第1题：如果点M(x, y)在运动过程中，总是满足关系式 $\sqrt{x^2 + (y+3)^2} + \sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 10$ ，点M的轨迹是什么曲线？为什么？写出它的方程。

(二) 整合提炼椭圆概念的形成方式，形成知识体系

问题3：椭圆除了这样下定义以外，是否还有其他的方法

式可以生成椭圆呢？从我们教材中是否可以找到答案？

设计意图：引导学生学会思考、学会探索深，让学生对椭圆这一核心概念进行第二次学习，深刻领悟椭圆这一核心概念，更深层次地梳理教材、整合教材，完成知识结构体系的系统化和知识与方法体系的网络化。

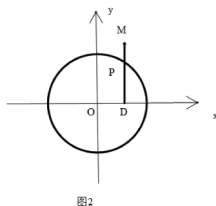


图2

二、自主建构

“自主建构”这一环节是高三一轮复习阶段的重点，对学生掌握知识之间的联系及知识系统化的要求与上新课的要求是有区别的。因此，这一环节上应该重点围绕知识的“联系”、“变化”这两个关键词来展开。

(一) 生成椭圆的方法之一：由圆的变换而得到

人教A版《数学》（选修2—1）第41页例2：如图1，在圆上任取一点P，过点P作x轴的垂线段PD，D为垂足。当点P在圆上运动时，线段PD的中点M的轨迹是什么？为什么？

人教A版《数学》（选修2—1）第50页习题2.2B组第1题：如图2，轴，点M在DP的延长线上，且，当点P在圆上运动时，求点M的轨迹方程，并说明轨迹的形状。

问题4：类比上述例2，你是否有新的发现？

教材第41页有个“思考”：从例2你发现椭圆与圆之间的关系吗？

设计意图：通过以上探究，可以让学生知道，圆按某一个方向做伸缩变换可以得到椭圆。此结构形式的考点在2011年高考数学陕西卷理科第17题已经呈现

拓展应用1：

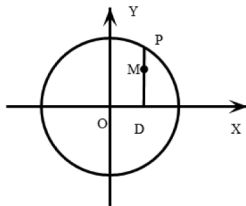


图5

例1：（2011年陕西卷理科）如图5：如图，设P是圆 $x^2 + y^2 = 25$ 上的动点，点D是P在x轴上的投影，M为PD上一点，

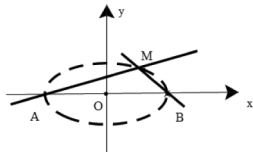
$$\text{且 } |MD| = \frac{4}{5}|PD|$$

(I) 当 P 在圆上运动时, 求点 M 的轨迹 C 的方程;

(II) 求过点 (3, 0) 且斜率为 $\frac{4}{5}$ 的直线被 C 所截线段的长度

(二) 生成椭圆的方法之二: 一个动点到两个定点连线的斜率之积是一个负常数

人教 A 版《数学》(选修 2—1) 第 41 页例 3: 如图 3, 设点 A、B 的坐标分别为 $(-5, 0)$, $(5, 0)$, 直线 AM、BM 相较于点 M, 且它们的斜率之积是, 求点 M 的轨迹方程。



此题是已知斜率之积求动点 M 的轨迹, 若将轨迹方程与椭圆标准方程比较, 那么反过来, 已知椭圆方程, 试问其上任一点 M 与点 A、B 连线的斜率之积 k 是否是一个负常数? k 与 a 、 b 又有什么关系? 由此得以提炼两个重要的一般性结论, 也是椭圆的有一种生成方式: 一个动点 M 与两个定点 A $(-a, 0)$, B $(a, 0)$ 所连直线的斜率之积是, 即满足则动点 M 的轨迹是椭圆。

还可以得出下面的结论, 反之亦成立, 即: A、B 为椭圆长轴的两个端点, M 为椭圆上 (除 A、B 外) 任一点, 则在类比人教 A 版《数学》(选修 2—1) 第 55 页的“探究”: 如图 4, 点 A、B 的坐标分别为 $(-5, 0)$, $(5, 0)$, 直线 AM、BM 相交于点 M, 且它们的斜率之积是, 求点 M 的轨迹方程, 并且点 M 的轨迹方程判断轨迹的形状。类比于例 3, 我们还可以有什么新发现呢?

高三一轮复习, 重点是如果引导学生学会联系知识、学会思考。通过上述一系列的探究之后, 还不应该就此停下来, 还可以进一步跟学生一起做如下探索: 如果将上述斜率之积改为斜率之商、斜率之和、斜率之差, 动点 M 的轨迹又是什么? 这在人教版教材中都有习题呈现 (此处不赘述)。此类结构形式的考点在高考试题中出现的频率较高。如 2012 年高考数学天津卷理科第 19 题, 2012 年高考数学四川卷文、理第 21 题。再比如 2013 年高考数学全国大纲卷理科第 8 题, 如下例 2:

拓展应用 2:

例 2 (2013 年理科大纲版数学) 椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 , 点 P 在 C 上且直线 PA_2 的斜率的取值范围是 $[-2, 1]$, 那么直线 PA_1 斜率的取值范围是 ()

- A. $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ B. $[\frac{3}{8}, \frac{3}{4}]$ C. $[\frac{1}{2}, 1]$ D. $[\frac{3}{4}, 1]$

(三) 生成椭圆的方法之三: 从圆的轨迹中来

人教 A 版教材《数学》(选修 2—1) 第 49 页第 7 题: 如图 5, 圆的半径为定长 r , A 是圆 O 内一个定点, P 是圆上任意一点, 线段 AP 的垂直平分线 L 和半径 OP 相交于点 Q, 当点 P 在圆上运动时, 点 Q 的轨迹是什么? 为什么?

问题 5: 教材中还有与此题相类似的题吗? (双曲线的简单几何性质习题 2.3A 组第 62 页第 5 题 (题目略))

(四) 生成椭圆的方法之四: 从圆的内切和外切的动态过程中来

(人教 A 版教材《数学》选修 2—1 题 2.2B 组第 50 页第

2 题, 由于篇幅有限, 笔者在此不再展开), 关于这种方式生成的椭圆, 在高考试题中也有出现过, 如: (2011 广东理 19): 设圆 C 与两圆 $(x + \sqrt{5})^2 + y^2 = 4$, $(x - \sqrt{5})^2 + y^2 = 4$ 中的一个内切, 另一个外切。

(1) 求 C 的圆心轨迹 L 的方程;

(2) (略)

(五) 生成椭圆的方法之四: 与距离有关的点的轨迹

(人教 A 版教材《数学》选修 2—1 第 47 页, 例 6 本例可以归纳出双曲线的第二定义及椭圆的焦半径公式。

三、圆锥曲线的统一定义

在高三一轮复习中, 对椭圆这一核心概念, 要强调学生“回归课本”、“回归基础”, 对整个圆锥曲线的概念形成一个网络结构图, 有一个由局部到整体、由点到面的整体形象的认知。由此引导学生类比人教 A 版《数学 2—1》(选修) 第 59 页例 5、第 62 页 B 组第 3 题、第 75 页“阅读与思考”的“圆锥曲线的离心率与统一方程”, 进行综合对比发现它们的共同点与区别, 进而归纳、提炼、整合出圆锥曲线的统一定义一: “平面上到一个定点 F 的距离和它到一条定直线距离之比是一个常数 e 的点的轨迹是圆锥曲线 (定点 F 不在定直线上), 即”其中, 点 F 是它的焦点, 直线是相应于点 F 的准线, 比值 e 是它的离心率”这里, 当时, 定的轨迹是椭圆; 当时, 点的轨迹是双曲线; 当时, 点的轨迹是抛物线。

高中数学“问题导学”教学法复习课堂教学模式中, 就特别强调要关注既要加强基础、提高能力、发展智力, 又要有针对性的面对学生“惑”的问题; 也指出了高三复习课不是“简单重复”, 要注重设计高水平的思维训练活动。因此需要教师在高三一轮复习教学过程中, 调动学生的学习热情、激发学生思考, 学会探索, 自主形成一套复习的抓手。教师再提炼、总结、归纳, 做好学生“回归课本、回归基础”的榜样, 而不是总说在嘴上, 既能忠实于教材、把握教材, 又能激活教材、挖掘教材、调适教材、驾驭教材与整合教材, 更有助于教学的“动态生成”, 并对教材进行适当的改编和重新建构, 注重知识的联系, 形成有效铺垫。真实体现教材为我所用、为生服务的理念, 真正让研读教材、课堂执行做到扎实有效, 让课堂教学真正走向有效课堂和高校课堂。

参考文献

- [1] 黄河清. 高中数学“问题导学”教学法 [M]. 北京: 教育科学出版社, 2013.
- [2] 段小龙, 谢玉平. 用好用活教材提高复习教学质量 [J]. 数学通讯, 2014(06):47-51.
- [3] 段小龙, 谢玉平. 高中数学教材章引言课教学初探 [J]. 中学数学教学参考, 2017(10):10-12.
- [4] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准 (实验) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2003.

作者简介: 蓝日更 (1983.9—), 男, 瑶族, 广西南宁市马山县人, 大学本科, 中学一级, 研究方向: 高中数学教学