○高考复习研究○

高三一轮复习微专题教学的实践与反思

——以“圆锥曲线中的非对称韦达定理问题”为例

王金辉

(江苏省南京市金陵中学河西分校,210000)

摘要: 本文以“圆锥曲线中的非对称韦达定理问题”为例,对高三一轮复习教学进行探究,指出利用微专题的形式,可以帮助学生深入挖掘数学的本质,真正领会数学的思想与处理问题的方法,体会数学学习的精髓.

关键词: 微专题; 深度学习; 核心素养

《普通高中数学课程标准》(2017 年版)明确指出“学科核心素养是培养人才的重要基础,数学学科核心素养是一种综合性的能力,它包括数学思维、关键技巧、情感、态度和价值观,它是通过不断学习和实践来培养的,是一种不断提升的能力,也是一种不断发展的技能.”传统的高三一轮复习课堂基本是按照章节顺序扫描知识点和基本方法,教师设置几道典型例题分析讲解,学生做几道变式题,侧重接受、练习和记忆,基础训练扎实,但存在对某些重点、难点和易错点高频点知识不能集中火力突破等问题. “一轮复习微专题”主要是针对学生在高三一轮复习中的具体情况,选择其学习时存在困难的或易错的或考试中高频出现的某些“点”,以其为中心,将相关的概念、规律、原理、模型等进行整合,在短时间内有效集群、对症下药、高效解决问题的微型复习专题.微专题教学对知识点的整合和优化能弥补传统复习课的问题,将高三一轮复习引向深入.

微专题选题总的目标是精选专题、精设题组、精讲精练,真正解决学生的某些疑难易错问题.下面以”圆锥曲线中的非对称韦达定理问题”为例,对高三一轮复习中微专题的编写和教学进行探究.

一、教学过程设计

1. 问题提出

在解决直线与圆锥曲线之间的位置关系时,通常需要将它们的方程联立,将一个变量 x 或 y 消去,得出一个一元二次方程如 $Ax^2+Bx+C=0$. 由根与系数的关系:$x_1+x_2=-\frac{B}{A}$,$x_1x_2=\frac{C}{A}$,处理诸如 ${x_1}^2+{x_2}^2$,$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$,$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$,$|x_1-x_2|$ 之类的式子.这类式子的结构特点是将 x_1 和 x_2 互换后结果不变,具有“对称性”,此类问题为“对称型韦达定理”,稍作变形,就可以直接利用韦达定理的结果整体代入,快速求解.但在某些问题中还会出现不对称的结构,比如 $\frac{x_1}{x_2}$,$ax_1+bx_2(a\neq b)$,$\frac{kx_1x_2+3x_1-2x_2}{kx_1x_2-3x_1+2x_2}$ 之类的问题,就难以直接应用韦达定理处理,我们把这类问题称为“非对称韦达定理问题”.学生通常在遇到此类问题时,束手无策.如何解决这类问题呢?

2. 回顾知识,激活认知结构

基础自测　已知抛物线 C: $y^2=4x$ 与定点 $P(2,1)$,直线 l 过点 P 且与抛物线交于 A,B 两点,且有 $7\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{PB}$,求直线 l 的斜率.

设计意图　通过基础自测，学生发现曲线上两点的横坐标(或纵坐标)关系为非对称结构：$7x_1+x_2=16$(或 $7y_1+y_2=8$)，结合韦达定理，利用方程思想通过代入消元可解决问题，激活已有的认知结构.

3. 典例分析，提升建构能力

例 1　已知椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的左、右顶点分别为 A,B，过右焦点 F 的直线与椭圆 C 交于点 P,Q(点 P 在 x 轴上方)，设直线 AP,BQ 的斜率分别为 k_1,k_2，是否存在常数 λ，使得 $k_1=\lambda k_2$？若存在求出 λ 的值，若不存在请说明理由.

分析　直线 l 的方程设为 $x=my+1$，代入椭圆方程得 $(4+3m^2)y^2+6my-9=0$，由韦达定理得 $y_1+y_2=-\frac{6m}{4+3m^2}$，$y_1y_2=-\frac{9}{4+3m^2}$.

解法 1 (积化和) 由韦达定理得 $my_1y_2=\frac{3}{2}(y_1+y_2)$，代入 $\lambda=\frac{k_1}{k_2}=\frac{my_1y_2-y_1}{my_1y_2+3y_2}=\frac{\frac{3}{2}(y_1+y_2)-y_1}{\frac{3}{2}(y_1+y_2)+3y_2}=\frac{1}{3}$.

解法 2 (代入消元) 由 $y_1+y_2=-\frac{6m}{4+3m^2}$ 得 $y_2=-\frac{6m}{4+3m^2}-y_1$，代入 $\lambda=\frac{k_1}{k_2}=\frac{my_1y_2-y_1}{my_1y_2+3y_2}=\frac{\frac{-9m}{4+3m^2}-y_1}{\frac{-9m}{4+3m^2}+3\left(-\frac{6m}{4+3m^2}-y_1\right)}=\frac{9m+(4+3m^2)y_1}{27m+3(4+3m^2)y_1}=\frac{1}{3}$.

解法 3 (第三定义) 由椭圆方程得 $\frac{y}{x+2}=\frac{3}{4}\cdot\frac{2-x}{y}$，代入 $\lambda=\frac{k_1}{k_2}=\frac{y_1}{x_1+2}\cdot\frac{x_2-2}{y_2}=\frac{3}{4}\cdot\frac{2-x_1}{y_1}\cdot\frac{x_2-2}{y_2}=-\frac{3}{4}\cdot\frac{x_1-2}{y_1}\cdot\frac{x_2-2}{y_2}$，化为对称结构后直接代入韦达定理即可.

解法 4 (直接求根) 利用求根公式直接得出两根代入化简.

设计意图　鼓励学生探索交流，教师引导和比较整理，师生一起进行方法归纳. 通过一题多解，帮助学生建构非对称韦达定理的可能形式和常用的解题策略.

4. 真题演练，强化重难点突破

例 2　(2020 年全国 I 卷理科 20) 已知 A,B 分别为椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$ 的左、右顶点，G 为 E 的上顶点，$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}=8$. P 为直线 $x=6$ 上的动点，PA 与 E 的另一交点为 C，PB 与 E 的另一交点为 D.

(1) 求 E 的方程；

(2) 证明：直线 CD 过定点.

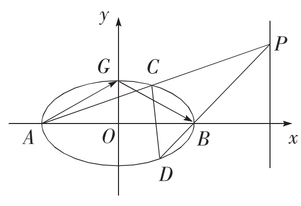

图 1

(解题过程略)

设计意图　通过例题的尝试和归纳，学生有了解决这一类问题的通法，利用真题，消除以往对圆锥曲线大题的恐惧，重新燃起突破重难点的斗志和兴趣.

5. 精选习题，注重迁移和灵活应用能力

练习 1　设 F 为椭圆 $C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的右焦点，过点 $(2,0)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于 A,B 两点，设直线 AF 和 BF 的斜率分别为 $k_1,k_2(k_2\neq 0)$，求证：$\frac{k_1}{k_2}$ 为定值.

练习 2　已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $P(2,\sqrt{2})$，且离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(1) 求椭圆的方程；

(2) 椭圆 C 的上、下顶点分别为 A,B，过

点(0,4)且斜率为 k 的直线与椭圆交于 M,N 两点,证明直线 BM 与 AN 的交点 G 在定直线上,并求出该定直线的方程.

练习 3　已知椭圆 C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$,点 A_1,A_2 分别是椭圆 C 的左、右顶点,点 F_1,F_2 分别是椭圆 C 的左、右焦点,过点 F_2 任作一条不与 y 轴垂直的直线与椭圆交于 M,N 两点,$\triangle MNF_1$ 的周长是 8.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 若直线 A_1M,A_2N 交于点 D,试判断点 D 是否在某条定直线 $x=t$ 上,若是,求出 t 的值;若不是,请说明理由.

设计意图　在不同的情境和条件下,展现非对称韦达定理的主要呈现模式,帮助学生发现多题一解的通法就是消元和化归,无论是利用积化和,还是代入消元消参,或利用第三定义将不对称结构一步转化为对称结构,都是为了帮助学生认知结构的迁移和灵活应用能力的提高.

6. 螺旋反复,加强长效记忆和理解能力

微专题教学两周后,在周测卷中学生再次"偶遇"该问题,情境和形式有了新的变化.

例 3　(2022 年南通高三期中测试题)已知双曲线 C: $x^2-y^2=8$ 的左焦点为 F,过点 F 作直线 l 交 C 的左支于 A,B 两点. 若点 $P(-4,2)$,直线 AP 交直线 $x=-2$ 于点 Q. 设直线 QA,QB 的斜率分别 k_1,k_2,求证: k_1-k_2 为定值.

思路探究　由直线 AP: $y-2=k_1(x+4)$,得 $Q(-2,2+2k_1)$,所以 $k_2=\frac{y_2-2-2k_1}{x_1+2}=\frac{y_2-2-2k_1}{my_2-2}$. 又 $k_1=k_{PA}=\frac{y_1-2}{x_1+4}=\frac{y_1-2}{my_1}$,所以 $k_1-k_2=\frac{y_1-2}{my_1}-\frac{y_2-2-2k_1}{my_2-2}=\frac{(y_1-2)(my_2-2)-my_1(y_2-2-2k_1)}{my_1(my_2-2)}=\frac{-2my_2-2y_1+4+2my_1+2mk_1y_1}{my_1(my_2-2)}$. 因为 $mk_1y_1=y_1-2$,$y_1+y_2=my_1y_2$,所以 $k_1-k_2=\frac{2m(y_1-y_2)}{my_1(my_2-2)}=\frac{2(y_1-y_2)}{y_1+y_2-2y_1}=-2$ 为定值.

设计意图　这道题在大背景非对称韦达定理的问题下,又引入了一个参数 k,除了以往常用的各种化归方法均可以实施,还增加了一个消参的步骤,意在引导学生对"消元消参"数学思想方法的再认识.

二、教学反思

微专题的教学不是一次性或一两节课就结束了,它需要贯穿复习的始终,不定期地"偶遇"、"变身". 再次遇到时,应注意区别于一般普通考题,并以此为契机,引导学生回顾在该类问题涉及的微专题中的常用方法,比较本题遇到的新情境和新问题,发掘问题的本质,强化模型意识,强调螺旋反复,帮助学生对一类问题通性通法的再认识.

编制微专题时可利用基础自测先设计一些问题串,引导学生对这部分的问题本质回顾和复习,再利用典型例题如真题,对这一类问题采用一题多解和多题一解,分析解决这一类问题的通法和巧法,一种方法适用的多种问题背景等. 适当的时候可借助数学软件,如几何画板或 GGB 等展示基本的模型,给学生视觉的冲击和思维的震撼. 再通过不定期的回顾练习,培养学生的建模能力,实现从低级思维到高级思维的转变.

另外,在每一部分的章末应根据本章复习后的学情和考情,提前考虑是否需要进行适当的微专题,以期弥补一轮复习中知识点琐碎、方法灵活多样、学生掌握重点题型和重点思想方法不熟练的缺陷.

微专题以"微"为核心,紧密结合学习、教学和考试的实际情况,范围小、视角新颖、针对性强、操作简便、指向明确,具有"因微而准、因微而细、因微而深"等特点,能有效地助力学生突破学习中的重点、难点、疑点和关键点. 微专题可通过帮助学生克服学习障碍,建立完善的知识结构,加强一轮复习的深度,培养解决问题的能力,并发展学生的数学核心素养.

(下转第 41 页)

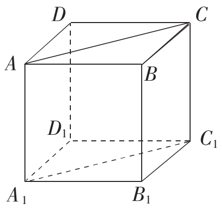

图 8

AA_1B_1B 为面 α，而 AA_1C_1C 为面 β，而 AA_1B_1B 内平行于 AA_1 的直线有无数条，这无数条直线均平行于面 AA_1C_1C，但是面 AA_1B_1B 与面 AA_1C_1C 相交，所以 A 错误；C 选项，当面 AA_1B_1B 为面 α，面 AA_1C_1C 为面 β，两个面均平行于直线 DD_1，但是面 AA_1B_1B 与面 AA_1C_1C 相交，所以 C 错误；D 选项，当面 AA_1B_1B 为面 α，而 BB_1C_1C 为面 β，两个面均垂直于面 $A_1B_1C_1D_1$，但是面 AA_1B_1B 与面 BB_1C_1C 相交，所以 D 错误. 从而只有 B 为正确选项.

合理利用信息技术，例如几何画板、flash 动画，动态展示几何体、几何图形的变化过程，对于培养学生的空间想象能力也尤为重要. 学生可以从动态展示的直观图形上，想象出空间几何体或平面图形的变化. 信息技术的应用，有利于学生通过直观图形，形成想象，更好地掌握 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象和性质.

四、用图象描述、理解、解决数学问题，强化学生的数形结合意识

史宁中教授认为，数学的结果是“看”出来的，而不是“证”出来的. 利用图形描述、理解数学问题，正是学生通过“看”形成直觉，从而解决数学问题.

例 4 （2020 年全国 Ⅱ 卷理科）设复数 z_1, z_2 满足 $|z_1| = |z_2| = 2$，$z_1 + z_2 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$，则 $|z_1 - z_2| =$ ______.

本道题用代数法去做，运算量大，运算方法不清晰，学生较难得出正确答案. 但是利用复数的几何意义去解题，数形结合，思路清晰，运算量小，画图秒解.

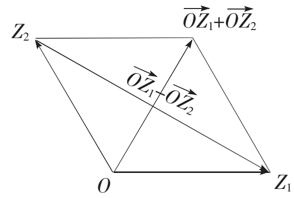

图 9

如图 9，设 z_1, z_2 在复平面内对应的向量分别为 $\overrightarrow{OZ_1}, \overrightarrow{OZ_2}$，由题意知 $|\overrightarrow{OZ_1}| = |\overrightarrow{OZ_2}| = 2$，$|\overrightarrow{OZ_1} + \overrightarrow{OZ_2}| = |\sqrt{3} + \mathrm{i}| = 2$，则以 $\overrightarrow{OZ_1}, \overrightarrow{OZ_2}$ 为邻边的平行四边形为菱形，且 $\angle Z_1OZ_2 = 120°$，如图 9 所示，则 $|\overrightarrow{OZ_1} - \overrightarrow{OZ_2}| = 2\sqrt{3}$.

代数问题几何化，几何问题代数化，在解题过程中数形结合的思想方法随处可见. 从历年的高考题看出，应用数形结合的思想方法在解题时常可起到事半功倍的效果，尤其是解答填空题、选择题，快、稳、准. 因此，在高考复习中，要多培养学生用图的意识，提高学生画图的能力，让学生真正做到心中有图（或几何体），见题想图（或几何体）.

参考文献

[1] 史宁中. 推进基于学科核心素养的教学改革[J]. 中小学管理，2016(2)：19－21.

[2] 宁锐，李昌勇，罗宗绪. 数学学科核心素养的结构及其教学意义[J]. 数学教育学报，2019，28(2).

[3] 人民网. 中国学生发展核心素养. http://edu.People.com.cn/n1/2016/0914/c1053－28714231.html.

（上接第 38 页）

参考文献

[1] 龙正祥. 基于核心素养的高三数学解题研究[J]. 中学数学教学参考 2021(9)：57－59.

[2] 李宽珍. “微专题”引领高效复习的思考[J]. 教学与管理，2015(28)：61－64.

[3] 曾荣. “微专题”复习：促进深度学习的有效方式[J]. 教育研究与评论：中学教育教学，2016(4)：7.

[4] 赵成芳. 新高考评价体系下高三数学“微专题”教学设计策略[J]. 数学学习与研究，2022(7)：29－31.