隐性轨迹题型面面观

■福建省龙岩市永定区城关中学　童其林(特级教师)

我们在解题时常碰到隐性轨迹问题，隐性轨迹就是轨迹不太明显，需要我们去发现。理论上说，我们学过的轨迹都可能成为隐性轨迹，下面我们就谈谈常见的隐性轨迹问题。

1. 隐性轨迹是直线或在直线上的某些点

例1　已知圆 $C_1: x^2+y^2=4$ 与圆 $C_2: (x-3)^2+(y-3)^2=4$，过动点 $P(a,b)$ 分别作圆 C_1，圆 C_2 的切线 PM，PN（M，N 分别为切点），若 $|PM|=|PN|$，则 $a^2+b^2-4a-6b+13$ 的最小值是（　　）。

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $\sqrt{13}$　　D. 13

解析：由题意知 $PM\perp C_1M$，$PN\perp C_2N$，$C_1(0,0)$，$C_2(3,3)$。

由 $|PM|=|PN|$，得 $|PC_1|^2-4=|PC_2|^2-4$，即 $a^2+b^2=(a-3)^2+(b-3)^2$，则 $a+b=3$。

$a^2+b^2-4a-6b+13=(a-2)^2+(b-3)^2$。

至此，我们有两种解决问题的方法。

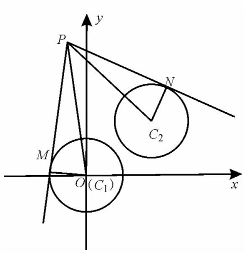

图1

法一：这式子可看成是定点 $(2,3)$ 到直线 $x+y=3$ 上动点 (a,b) 的距离的平方，在直线外定点到直线上动点的距离中，垂直线段最短。

故 $(a-2)^2+(b-3)^2$ 的最小值为最短距离的平方，即 $\left(\frac{|2+3-3|}{\sqrt{2}}\right)^2=2$。选B。

法二：$(a-2)^2+(b-3)^2=(a-2)^2+a^2=2a^2-4a+4=2(a-1)^2+2\geqslant 2$，当且仅当 $a=1$ 时取得最小值2，选B。

点评：法一通过隐性轨迹转化为点到直线的距离问题，法二通过配方法求得最小值。

例2　设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $S_n=\frac{n}{m}$，$S_m=\frac{m}{n}$（$m\neq n$），则 $S_{m+n}-4$ 的符号是（　　）。

A. 正　　B. 负

C. 非负　　D. 非正

解析：要求出 S_{m+n}，可先求出首项和公差，这是常用方法。也可以通过点 $\left(n,\frac{S_n}{n}\right)$，$\left(m,\frac{S_m}{m}\right)$，$\left(m+n,\frac{S_{m+n}}{m+n}\right)$ 共线，求得 S_{m+n}，$\dfrac{\frac{S_m}{m}-\frac{S_n}{n}}{m-n}=\dfrac{\frac{S_{m+n}}{m+n}-\frac{S_n}{n}}{(m+n)-n}\Rightarrow S_{m+n}=\frac{(m+n)^2}{mn}>4$，则 $S_{m+n}-4>0$。选A。

点评：当公差不为零时，等差数列的通项公式是关于 n 的一次函数，等差数列的前 n 项和公式是关于 n 的二次函数，而 $\frac{S_n}{n}$ 是关于 n 的一次函数，$\left(n,\frac{S_n}{n}\right)$，$\left(m,\frac{S_m}{m}\right)$，$\left(m+n,\frac{S_{m+n}}{m+n}\right)$ 共线，这就为数形结合提供了理论基础。

2. 隐性轨迹是圆或圆弧

例3　(2020年北京卷第5题)如图2，已知半径为1的圆经过点 $(3,4)$，则其圆心到原点距离的最小值为（　　）。

A. 4　　B. 5

C. 6　　D. 7

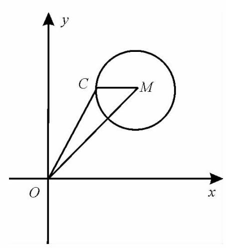

图2

解析：设圆心为 $C(x,y)$，则 $\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}=1$，化简得 $(x-3)^2+(y-4)^2=1$。

由图知，$|OC|+1\geqslant|OM|=5$，即 $|OC|\geqslant 5-1=4$，当且仅当 C 在线段 OM 上时取得等号，选A。

点评：圆心 C 的轨迹是以 $M(3,4)$ 为圆

心，1 为半径的圆，所以 $|OC|$ 的最大值是 $|OM|+1$，最小值是 $|OM|-1$。

例 4 （龙岩市 2020 年 5 月质检题理数第 11 题）如图 3，在棱长为 2 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，P 是正方形 ADD_1A_1 内（包括边界）的动点，M 是 CD 的中点，且 $\angle PBA=\angle PMD$，则当 $\triangle PAD$ 的面积最大时，$|PA|$ 的值为（　　）。

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$　　D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

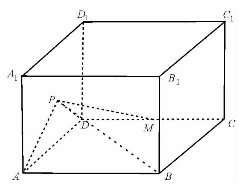

图 3

解析：由题意可知，$|PA|=2|PD|$，以 AD 所在直线为 x 轴，AD 的中垂线为 y 轴建立直角坐标系，设 $A(-1,0)$，$D(1,0)$。设 $P(x,y)$，所以 $(x+1)^2+y^2=4(x-1)^2+4y^2$。

也即 $\left(x-\frac{5}{3}\right)^2+y^2=\frac{16}{9}$，点 P 的轨迹是以 $\left(\frac{5}{3},0\right)$ 为圆心，$\frac{4}{3}$ 为半径的圆（在正方形 ADD_1A_1 内的部分）。$|PA|$ 的最大值为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$。

点评：本题是立体几何与解析几何的综合问题，难点之一是要探求点 P 在平面 ADD_1A_1 满足的条件，难点之二是在此条件下求出点 P 的轨迹（阿波罗尼斯圆弧）。

例 5 （龙岩市 2020 年高中毕业班 3 月月考卷）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=2+\sqrt{4a_n-a_n^2}$，则 $a_1+a_{2\,020}$ 的最大值是（　　）。

A. $4-2\sqrt{2}$　　B. $8-\sqrt{2}$

C. $4+2\sqrt{2}$　　D. $8+\sqrt{2}$

解析：依题意知，$a_{n+1}=2+\sqrt{4a_n-a_n^2}$，可化为 $(a_{n+1}-2)^2+(a_n-2)^2=4$。

令 $b_n=(a_n-2)^2$，则 $b_{n+1}+b_n=4$。

同理，$b_{n+2}+b_{n+1}=4$，于是 $b_{n+2}=b_n$。

$b_1=(a_1-2)^2$，$b_{2\,020}=b_2=(a_2-2)^2$。

则 $b_1+b_{2\,020}=b_1+b_2=4$，即 $(a_1-2)^2+(a_{2\,020}-2)^2=4$。

法一：令 $\begin{cases}a_1=2+2\cos\theta,\\ a_{2\,020}=2+2\sin\theta\end{cases}\Rightarrow a_1+a_{2\,020}=4+2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 4+2\sqrt{2}$，当且仅当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时等号成立，选 C。

法二：由不等式关系知 $\frac{x+y}{2}\leqslant\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$，故 $a_1+a_{2\,020}=(a_1-2)+(a_{2\,020}-2)+4\leqslant 2\times\sqrt{\frac{(a_1-2)^2+(a_{2\,020}-2)^2}{2}}+4=4+2\sqrt{2}$，当且仅当 $a_1=a_{2\,020}=2+\sqrt{2}$ 时等号成立，选 C。

法三：$(a_1-2)^2+(a_{2\,020}-2)^2=4$，即点 $(a_1,a_{2\,020})$ 在 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$ 上。

令 $z=x+y$，即 $x+y-z=0$，则 $d=\frac{|z-4|}{\sqrt{2}}\leqslant 2$，$|z-4|\leqslant 2\sqrt{2}$，$4-2\sqrt{2}\leqslant z\leqslant 4+2\sqrt{2}$，$z_{\max}=4+2\sqrt{2}$，选 C。

点评：本题有一定的难度，得到类似于圆的模型 $(a_1-2)^2+(a_{2\,020}-2)^2=4$ 是解题的关键。

3. 隐性轨迹是椭圆

例 6 已知 O 为坐标原点，点 E、F 的坐标分别为 $(-1,0)$ 和 $(1,0)$，点 A、P、Q 运动时满足 $|\overrightarrow{AE}|=2|\overrightarrow{EF}|$，$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{QF}$，$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AF}=0$，$\overrightarrow{AP}/\!/\overrightarrow{EP}$。求动点 P 到 E 的最大值。

解析：因为 $|\overrightarrow{AE}|=2|\overrightarrow{EF}|=4$，所以点 A 在以 E 为圆心，4 为半径的圆上。

因为 $\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{QF}$，$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AF}=0$，所以 PQ 为线段 AF 的中垂线。

因为 $\overrightarrow{AP}/\!/\overrightarrow{EP}$，所以点 P 在 AE 上。

$|PF|=|PA|$，则 $|PE|+|PF|=|PE|+|PA|=|EA|=4>|EF|=2$。点 P 的轨迹是以 E、F 为焦点的椭圆。因为 $c=1$，$a=2$，所以 $a^2=4$，$b^2=3$。轨迹 P 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$。

根据椭圆性质，可得 $|PE|$ 的最大值为 3。

点评：说是通过定义解答了本题，其实是从许多的隐性轨迹转化而成的，一是点 A 在以 E 为圆心，4 为半径的圆上，即得到 $|AE|$

$=4$；二是 PQ 为线段 AF 的中垂线；三是点 P 在 AE 上，然后落实在 $|PE|+|PF|=4$ 这个定值上，点 P 在右端点时取到最大值。

4. 隐性轨迹是抛物线

例 7 如图 4，三条直线 a、b、c 两两平行，直线 a、b 间的距离为 p，直线 b、c 间的距离为 $\frac{p}{2}$，A、B 为直线 a 上两定点，且 $|AB|=2p$，MN 是在直线 b 上滑动的长度为 $2p$ 的线段。假设 d 是 $\triangle AMN$ 的外心 C 到直线 c 的距离，试探求：当 $\triangle AMN$ 的外心 C 在什么位置时，$d+|BC|$ 最小，最小值是多少？

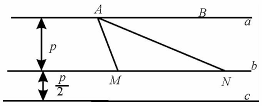

图 4

解析：以直线 b 为 x 轴，以过 A 点且与直线 b 垂直的直线为 y 轴建立直角坐标系。

设 $\triangle AMN$ 的外心为 $C(x,y)$，则 $A(0,p)$，$M(x-p,0)$，$N(x+p,0)$。

由题意知 $|CA|=|CM|$，故：

$\sqrt{x^2+(y-p)^2}=\sqrt{(x-x+p)^2+y^2}$。

化简得 $x^2=2py$。

点 C 的轨迹是以原点为顶点，y 轴为对称轴，开口向上的抛物线 E。

由此可得直线 c 恰为轨迹 E 的准线。

由抛物线的定义知 $d=|CF|$，其中 $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$ 是抛物线的焦点。

则 $d+|BC|=|CF|+|BC|$。

线段 BF 与抛物线的交点即为所求的点。

直线 BF 的方程为 $y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}p$，联立方程组 $\begin{cases}y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}p,\\x^2=2py,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\frac{1}{4}p(1+\sqrt{17}),\\y=\frac{9+\sqrt{17}}{16}p。\end{cases}$

点 C 坐标为 $\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}p,\frac{9+\sqrt{17}}{16}p\right)$。

此时 $d+|BC|$ 的最小值为 $|BF|=\frac{\sqrt{17}}{2}p$。

点评：求出点 C 的轨迹是解决问题的关键。本题似曾相识，却又很新颖，有较强的探究性。

（责任编辑 徐利杰）

（上接第 13 页）

67. 已知双曲线 $W:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，点 $N(0,b)$，右顶点是 M，且 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MF_2}=-1$，$\angle NMF_2=120°$。

（1）求双曲线 W 的方程；

（2）过点 $Q(0,-2)$ 的直线 l 交双曲线 W 的右支于 A、B 两个不同的点（B 在 A、Q 之间），若点 $H(7,0)$ 在以线段 AB 为直径的圆的外部，试求 $\triangle AQH$ 与 $\triangle BQH$ 面积之比 λ 的取值范围。

68. 已知椭圆 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 的左、右两个顶点分别为 A、B，曲线 C 是以 A、B 两点为顶点，焦距为 $2\sqrt{5}$ 的双曲线，设点 P 在第一象限且在曲线 C 上，直线 AP 与椭圆相交于另一点 T。

（1）求曲线 C 的方程；

（2）设 P、T 两点的横坐标分别为 x_1、x_2，求证：$x_1\cdot x_2$ 为一定值；

（3）设 $\triangle TAB$ 与 $\triangle POB$（其中 O 为坐标原点）的面积分别为 S_1 与 S_2，且 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\leqslant 15$，求 $S_1^2-S_2^2$ 的取值范围。

69. 在直角坐标系 xOy 中，已知定点 $F_1(0,-\sqrt{3})$，$F_2(0,\sqrt{3})$，动点 P 满足 $|\overrightarrow{PF_1}|-|\overrightarrow{PF_2}|=2$，设点 P 的曲线为 C，直线 $l:y=kx+m$ 与曲线 C 交于 A，B 两点。

（1）写出曲线 C 的方程，并指出曲线 C 的轨迹；

（2）当 $m=1$ 时，求实数 k 的取值范围；

（3）证明：存在直线 l，满足 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{AB}|$，并求实数 k，m 的取值范围。

（责任编辑 徐利杰）