

强化高考数学一轮复习若干教学意识

——以“直线与圆的位置关系”为例

福建省漳州康桥学校 (363107) 田小萍

高考复习是高中师生、学校领导、教育专家等一个永恒的话题,更是高三师生直接面临的一个挑战,选择不同的复习策略直接影响高考的成败.笔者以“直线与圆的位置关系”这一专题为例,结合自身的教学体会,谈谈优化高考数学一轮复习的策略,以此与同仁们共勉、商榷.

一、强化明确课标与考纲意识

课程标准是中小学教学的指导文件,强化课程标准意识可以有的放矢地开展教学工作.各省自主命题已经有些年了,各省对高考的知识内容不尽相同,而考试大纲、考试说明则是高考命题的依据,它对高考要考查的知识范围和每个考点的能力层次有明确的要求.

在复习直线与方程、圆与方程的基础上,对于直线与圆的位置关系,课程标准及考试说明对此的要求如下:

1. 能根据给定直线、圆的方程,判断直线与圆的位置关系;能根据给定两个圆的方程判断两圆的位置关系.
2. 能用直线和圆的方程解决一些简单的问题.
3. 初步了解用代数方法处理几何问题的思想.

对课程标准及考试大纲、考试说明的研究,可以做到有效备考,对高考一轮复习起着事半功倍的作用.

二、强化精选例题教学意识

例题的选取直接关系到课堂的教学效果,高考一轮复习还是要以落实基础为主,所选例题应尽可能覆盖本课时所包含的知识要点.另外不要盲目选择外省的高考题、模拟题,得考虑是否符合本省的高考实际,更不能选择一些偏题、怪题.

知识要点肯定要进行复习,若对知识要求单纯的复习显然对许多学生来讲显得枯燥乏味.那么有必要将知识要点渗透到所选的例子之中.直线与圆的位置关系判定方法是本课时的知识要点之一,我们可以选如下例子:

例1 若圆 $x^2 + y^2 = 1$ 与直线 $y = kx + 2$ 没有公共点,则实数 k 的取值范围为_____.

本例主要考查直线与圆的位置关系,由此题的解析引导学生回顾直线与圆位置关系的判断方法:

设直线 $l: Ax + By + C = 0 (A^2 + B^2 \neq 0)$, 圆: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 (r > 0)$, 设 d 为圆心 (a, b) 到直线 l 的距离,联立直线和圆的方程,消元后得到的一元二次方程的判别式为 Δ .

	几何判断	代数判断
相交	$d < r$	$\Delta > 0$
相切	$d = r$	$\Delta = 0$
相离	$d > r$	$\Delta < 0$

“以能力立意命题”是数学的学科特点和考试目标所决定的.高考数学科考试的重点是考查运用知识分析问题的方法和解决问题的能力,因而在复习教学中要突出对学生各种能力的培养,对于例1我们做如下变式:

变式 若椭圆 $x^2 + 2y^2 = 1$ 与直线 $y = kx + 2$ 没有公共点,则实数 k 的取值范围为_____.

在这里强调方法技巧:用几何方法判断直线与圆的位置关系体现了图形的特点,在解题时将数与形结合很多时候可以大大简化运算;而代数方法则体现了二次曲线问题的通性通法,对变式1中代数方法依然有效.这就要求我们在解题时要灵活选择,通过变式教学来培养学生分析问题、解决问题的能力.

三、强化因材施教教学意识

因材施教是教学中一项重要的教学原则,在教学中根据不同学生的认知水平,学习能力以及自身素质,教师选择适合每个学生特点的学习方法进行有针对性的教学.

新课程标准下的教材编排注重螺旋式上升,因而在高一、高二更应强调基础知识的学习.各校生源差异化较大,因对生源较好的学校在高考数学复习时,则应渗透相关的拓展知识,这也正好可以促进当前高校自主招生考试的有效备考.

本节课我们可以选如下:

例2 圆 O_1 的方程为 $x^2 + (y + 1)^2 = 4$, 圆 O_2 的圆心 $O_2(2, 1)$. 若圆 O_2 与圆 O_1 交于 A, B 两点;且

$|AB| = 2\sqrt{2}$, 求圆 O_2 的方程.

解析: 设圆 O_2 的方程为 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = r_2^2$, 因为圆 O_1 的方程为 $x^2 + (y+1)^2 = 4$, 将两圆的方程相减, 即得两圆公共弦 AB 所在直线的方程 $4x + 4y + r_2^2 - 8 = 0$. 作 $O_1H \perp AB$, 则 $|AH| = \frac{1}{2}|AB| = \sqrt{2}$, $|O_1H| = \sqrt{O_1A^2 - AH^2} = \sqrt{2}$, 由圆心 $O_1(0, -1)$ 到直线 AB 的距离得 $\frac{|r_2^2 - 12|}{4\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, 得 $r_2^2 = 4$ 或 $r_2^2 = 20$. 故圆 O_2 的方程为 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$ 或 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 20$.

由本例公共弦的求解引出圆系方程, 并说明圆系方程的原理, 相关知识如下:

(1) 过直线 $Ax + By + C = 0$ 和圆 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ 交点的圆系为 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F + \lambda(Ax + By + C) = 0 (\lambda \in \mathbb{R})$.

(2) 过两圆 $C_1: x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$ 和 $C_2: x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0$ 交点的圆系为 $x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 + \lambda(x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2) = 0 (\lambda \in \mathbb{R})$, 当 $\lambda = -1$ 时, 它表示两圆相交弦所在直线方程.

在这里也产生了一个疑问, 例2的考查是否超出了高考数学的考查范围? 答案是否定的. 本例的解答完全可以避开圆系方程(含公共弦所在的直线方程), 其中可以结合图形来解此例, 但容易忽略两种情况之一. 但多一些方法, 自然可以多一些解题思路, 本题利用公共弦方程使解答显得更为简单快捷.

四、强化错因分析教学意识

所谓易错即许多学生, 甚至老师都会不小心忽略某种情况、某种条件等而致解题失误. 话说“长堤除蚁患, 固实升里基”, 教师对易错题进行归纳, 在一轮复习时对学生进行检查, 并对试题的错误解法进行错因分析, 在高考预防“会做”试题的失分可以起一定的作用. 通过易错题的教学, 可以提高学生解题质量, 可以让学生更准确地把握知识点及概念点, 可以极大地改善粗心的现象, 可以有效提高复习质量.

本节课我们可以选如下:

例3 过点 $(2, 3)$ 且与圆 $(x-3)^2 + y^2 = 1$ 相切的直线方程为_____.

正解: 当所求直线斜率不存在时, 直线方程 $x = 2$ 满足题意; 当所求直线斜率存在时, 可设方程为 $y - 3 = k(x - 2)$, 即 $kx - y + 3 - 2k = 0$. 因为直线与圆相切, 故 $\frac{|3k + 3 - 2k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1$, 解得 $k = -\frac{4}{3}$. 所以

$4x + 3y - 17 = 0$. 综上, 所求直线方程为 $x = 2$ 或 $4x + 3y - 17 = 0$.

错因分析: 本题易忽略斜率不存在即 $x = 2$ 的情况而导致漏解, 其根本原因忽略直线方程的点斜式的适用范围. 又如“直线在两坐标轴上截距相等”, 和两截距有关的, 通常设直线方程的截距式为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1$, 但此情况显然是不完整的, 它不可能表示过原点的直线, 因此还得讨论 $y = kx$ 的情形.

五、强化思想与方法教学意识

中学数学教学大纲中明确指出: 数学基础知识是指数学中的概念、性质、法则、公式、公理、定理以及由其内容所反映出来的数学思想方法. 在中学数学各版本的教材中, 数学思想方法的内容没有单独的专题内容, 除了一些具体的数学方法比较明确外, 许多重要的数学思想方法都没有明确和系统介绍, 而它们一直蕴含在数学教学之中. 从数学教学的整个过程来看, 如果只是长期、反复、不明确的渗透数学思想方法, 将会影响学生的认识从感性到理性的飞跃, 所以需要学生有意识地去理解、掌握和领会.

例4 若集合 $A = \{(x, y) | y = 1 + \sqrt{4 - x^2}\}$, $B = \{(x, y) | y = k(x - 2) + 4\}$, 当 $A \cap B$ 中含有2个元素时, 实数 k 的取值范围是_____.

解析: 由 $y = 1 + \sqrt{4 - x^2} \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 4 (y \geq 1)$, 知集合 A 表示以 $(0, 1)$ 为圆心, 2 为半径的上半圆. 集合 B 表示过定点 $(2, 4)$ 的直线. $A \cap B$ 中含有2个元素, 亦即直

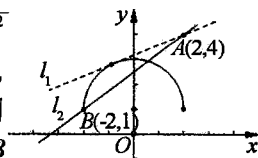


图1

线 $y = k(x - 2) + 4$ 与半圆 $y = 1 + \sqrt{4 - x^2}$ 有且仅有两个交点.

作出相应直线与半圆, 如图1所示. 通过图形分析, 易知符合题意的斜率 k 应介于图中的 l_1 (与半圆相切的直线之一, 另一条斜率不存在) 的斜率和 l_2 (过半圆左端点 $(-2, 1)$ 的直线) 的斜率之间, 且 k 不能等于 l_1 的斜率, 但可以等于 l_2 的斜率, 由此可以求得 k 的取值范围是 $(\frac{5}{12}, \frac{3}{4}]$.

数形结合思想是高中重要的数学思想方法之一, 通过本例有效渗透数形结合的思想方法. 让学生体会用数形结合解题的快乐, 激发学习数学的热情. 很多时候, 在解题中运用数学思想方法可以达到事半功倍的效果. 在一轮复习, 学生已经基本掌握了高中数学的基础知识, 因而复习过程中关注思想方法

的教学是必要的.

六、强化创新与探究教学意识

注重“数学探究”是新课程改革的一大亮点.《普通高中数学课程标准》明确指出:数学探究、数学建模、数学文化是贯穿于整个高中数学课程的重要内容,这些内容不单独设置,渗透在每一个模块或专题中.近几年,考查学生创新精神、探究意识的开放性试题、创新类试题现身各省市高考试题之中,这类试题理应关注.

在本课时中,我们可以设计如下:

例 5 已知直线 $l: 3x - 4y - 1 = 0$, 讨论圆 $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = r^2 (r > 0)$ 上与 l 距离为 1 的点的个数.

分析: 设与 l 距离为 1 的平行直线分别为 l_1, l_2 , 本题可看成圆 $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = r^2 (r > 0)$ 与 l_1, l_2 公共点的个数. 显然公共点个数与 r 的取值有关, 直线与圆的位置关系最为特殊的是相切, 我们可以从圆与 l_1 相切或与 l_2 相切入手解此题. 解略.

从特殊到一般是解决创新试题及探究试题的常用方法, 另外学生在解答此类题时, 思维要不拘一格地从所给出的信息中尽可能扩展, 朝各个方向去探寻各种不同的解决途径和答案. 学生的思维能以熟悉的有关知识领域及其结构为依据, 采用跳跃式、发散性思维, 从而实现思维的创新解决问题.

七、强化主干与交汇教学意识

高考对数学知识的考查, 既要全面又突出重点. 注重学科的内在联系和知识的综合性, 从学科的整体高度和思维价值的高度考虑问题, 在高考中要用有限的试题考查更多的知识, 知识交汇考查更是一种有效手段.

高中数学的主干知识蕴含的数学思想方法丰富, 主干知识的教学活动对培养学生各种能力及数学素养有着重要作用, 高考对主干知识的考查可以体现选拔功能. 从近几年的高考数学试题来看, 既注重对基础知识的全面考查, 也突出对主干知识的着重考查.

解析几何是高中数学的主干知识, 它与向量交汇已不新鲜. 解析几何与向量等知识的交汇试题值得关注, 本课时可以选如下例题:

例 6 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知圆 $x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0$ 的圆心为 Q , 过点 $P(0, 2)$ 且斜率为 k 的直线与圆 Q 相交于不同的两点 A, B .

(1) 求 k 的取值范围;

(2) 是否存在常数 k , 使得向量 $\vec{OA} + \vec{OB}$ 与 $\vec{PQ}$

共线? 如果存在, 求 k 的值; 若不存在, 请说明理由.

八、强化陈题与教材教学意识

近几年的高考数学试题坚持新题不难, 难题不怪的命题方向. 强调对通性通法的考查, 并且一些高考试题能在课本中找到“原型”. 这里的陈题是指近几年的高考试题及教材上的例题. 高考题及教材中的例题都是经过专家们反复论证精心设计的, 具有针对性和典型性. 陈题改造, 推陈出新是高考永恒不变的主题. 因此, 要关注陈题、用好课本, 充分发挥历年高考试题、教材中例题的典型作用.

新教材中有很多阅读材料、实习作业, 教师可以对其进行改编、变式, 在高三一轮复习适当渗透部分试题进行考查.

例 7 (2011 年江西卷) 若曲线 $C_1: x^2 + y^2 - 2x = 0$ 与曲线 $C_2: y(y - mx - m) = 0$ 有四个不同的交点, 则实数 m 的取值范围是().

- A. $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ B. $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0) \cup (0, \frac{\sqrt{3}}{3})$
C. $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$ D. $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$

解析: 曲线 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 表示以 $(1, 0)$ 为圆心, 以 1 为半径的圆, 曲线 $y(y - mx - m) = 0$ 表示 $y = 0$, 或 $y - mx - m = 0$ 过定点 $(-1, 0)$, $y = 0$ 与圆有两个交点, 故 $y - mx - m = 0$ 也应该与圆有两个交点, 由图 2 可以知道, 临界情况即是与圆相切的时候, 经计算可得, 两种相切分别

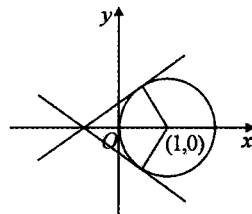


图 2

对应 $m = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 和 $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以 m 的取值范围应是 $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0) \cup (0, \frac{\sqrt{3}}{3})$.

从以上解析来看, 其本质是 $y - mx - m = 0$ 不能过 $y = 0$ 与圆的交点, 而当 $m = 0$ 时, 两直线重合, 避免了两种情形的讨论. 因此, 我们采取如下变式进行教学.

变式 若曲线 $C_1: x^2 + y^2 - 2x = 0$ 与曲线 $C_2: y(x - y + m - 1) = 0$ 有四个不同的交点, 则实数 m 的取值范围是_____.

分析: 解决变式与例 7 类似, 但变式 $x - y + m - 1 = 0$ 对 $y = 0$ 与圆的两个交点需要分两种情况进行讨论, 能加深学生对问题本质的理解.