

信息技术辅助下的高中数学探究课堂研究

——以一节“直线与圆的位置关系”高三一轮复习课为例

朱慧琳

(江苏省沙溪高级中学 江苏 苏州 215400)

摘要:《普通高中数学课程标准(2017年版)》要求,在平面解析几何的教学中,应充分发挥信息技术的作用,通过计算机软件向学生演示方程中参数的变化对方程所表示的曲线的影响,使学生进一步理解曲线与方程的关系.本节课中师生借助信息技术工具,层层深入探究直线与圆不同的位置关系,几何画板的动态图形帮助学生更直观地掌握图形特点,理清方程中的参数与图形变化间的联系,学生的直观想象、代数运算以及数学探究能力得到提高.

关键词:信息技术;数学探究;课程融合

1 学情分析

本节课授课对象是江苏省沙溪高级中学高三某史政生组合班级学生,有一定数学基础知识、自主学习能力、运算能力和综合运用知识解决问题的能力.

2 教学内容分析

本节课为高三一轮复习课,主要是在学生对直线与圆的位置关系有一定理解的基础上进一步加深理解、提高能力,使学生对高中数学解析几何解决问题的方法有更进一步的认识,也为后续椭圆、双曲线以及抛物线的复习作铺垫和方法引导.

教学目标 (1)能够根据给定直线、圆的方程,判断直线与圆的位置关系;能够根据直线与圆的位置关系,求出相应的方程或确定方程中参数的值与范围;能够利用直线和圆的方程解决一些简单的数学问题与实际问题.

(2)通过习题多解法的探究,体验数形结合的数学方法,比较代数法与几何法在解题中的优劣,能够根据题目中所给的不同条件选择合适的求解方法.

(3)在探究过程中锻炼学生用数学的眼光来看待问题,培养直观想象、数学运算等数学核心素养.

教学重点 对于直线与圆位置关系的图形特点、代数特征、几何特征的转化.

教学难点 解题过程中根据已知条件优选方法(几何法、代数法)进行解题.

3 过程实录

3.1 立足基础 知识梳理

课前热身 已知 $\odot M: x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$,直

线 $l: 2x + y + 2 = 0$.

问题1 直线 $2x + y + b = 0$ 与 $\odot M$ 相交于 C, D 两点,求 b 的范围;若 $CD = 2\sqrt{3}$,求 b 的值.

生1:直线与圆相交,即圆心到直线的距离

$$d = \frac{|2 + 1 + b|}{\sqrt{5}} = \frac{|3 + b|}{\sqrt{5}} < r.$$

又 $r = 2$,解得 $b \in (-3 - 2\sqrt{5}, -3 + 2\sqrt{5})$.

第二小问由垂径定理基本图形可知,圆心到直线的距离 $d = \sqrt{r^2 - \left(\frac{CD}{2}\right)^2} = \sqrt{4 - 3} = 1$.

$$\text{又 } d = \frac{|3 + b|}{\sqrt{5}} = 1,$$

解得 $b = -3 - 2\sqrt{5}$ 或 $b = -3 + 2\sqrt{5}$.

生2:直线与圆相交,从代数角度来看就是直线方程与圆方程联立的方程组有两解,消元得

$$5x^2 + (4b + 2)x + b^2 + 2b - 2 = 0,$$

此方程有两解则 $\Delta > 0$,

解得 $b \in (-3 - 2\sqrt{5}, -3 + 2\sqrt{5})$.

师:两位同学分别从几何与代数角度精准刻画了直线与圆相交这一位置关系,思路清晰,计算准确.生1提示我们由垂径定理可得圆里的弦长公式为 $l = 2\sqrt{r^2 - d^2}$.

问题2 求过点 $F(-1, 0)$ 的 $\odot M$ 的切线方程,并求切线长.

生3:直线与圆相切,就是圆心到直线的距离等于半径.设直线为 $y = k(x + 1)$,由 $d = \frac{|2k - 1|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 2$,解得

作者简介:朱慧琳(1996-),女,江苏太仓人,本科,中学二级教师,研究方向:中学数学教学研究.

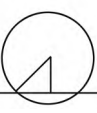
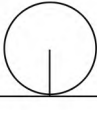
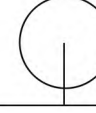
$k = -\frac{3}{4}$, 直线方程为 $3x + 4y + 3 = 0$, 切线长 $l = \sqrt{Mf^2 - d^2} = 1$.

师: 点 $F(-1, 0)$ 易知在圆外, 因此过点 F 应该可作圆的两条切线, 但按照生3的解法为什么只能求出一条切线? 另外一条切线方程是什么?

生3: 哦! 直线斜率不存在的情况, 即直线方程为 $x = -1$, 此时圆心到这条直线的距离 $d = |1 - (-1)| = 2 = r$, 也符合题意.

师: 研究直线与圆相切问题时, 先通过判断点与圆位置关系, 确定切线条数, 容易出错的情况是切线斜率不存在, 先判断再计算! 通过上面两个小题, 我们运用了直线与圆的位置关系的代数与几何特征, 我们一起来回顾总结. (教师板书梳理见表1)

表1

位置关系	相交	相切	相离
图形			
代数特征	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
几何特征	$d < r$	$d = r$	$d > r$

问题3 P 为 l 上的动点, 过点 P 作 $\odot M$ 的切线, 求切线长的最小值.

生4: 连接 MP , 在 $\text{Rt}\triangle APM$ 中, $AP = \sqrt{MP^2 - MA^2} = \sqrt{MP^2 - 4}$. 因此 MP 取得最小值时, AP 取得最小值, 而 $MP_{\min} = \frac{|2+1+2|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$, $AP_{\min} = 1$.

生5: 由垂径定理图形可知, 当 $MP \perp l$ 时, 切线长最小, $d_{M-l} = \frac{|2+1+2|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$, $AP_{\min} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 2^2} = 1$.

师: 比较这两位同学的两种解法, 显而易见, 通过挖掘图形的几何性质能够更快地解决此类问题. (教师几何画板展示图1动态过程)

问题4 P 为 l 上的动点, 过点 P 作 $\odot M$ 的切线 PA, PB , 切点为 A, B , 求四边形 $PAMB$ 面积的最小值.

生6: $S_{\text{四边形}PAMB} = 2S_{\triangle APM} = 2 \times \frac{1}{2} \times AM \times AP = 2AP$, 因此 $(S_{\text{四边形}PAMB})_{\min} = 2AP_{\min} = 2$.

师: 上面两个问题的解决中同学都将所求量进行了巧妙的转化, (3) 中将切线长转化为圆心到直线的

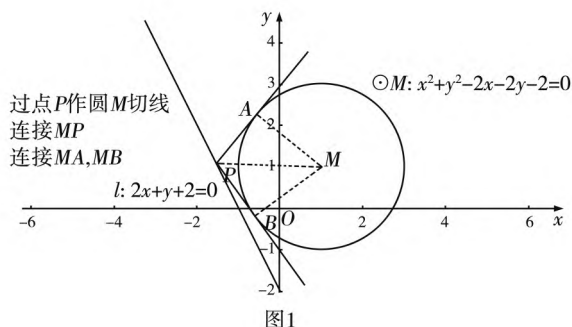


图1

距离; (4) 中更是将四边形面积转化为三角形面积再转化为切线长.

变式1 直线 $2x + y + t = 0$ 上存在一点 Q , 过点 Q 作 $M: x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$ 的切线 QA, QB , A, B 为切点, 使 $\angle AQB = 60^\circ$, 求 t 的取值范围.

生7: 由图易知(生7在图1的基础上稍作变化得到图2) 当 $\angle AQB = 60^\circ$ 时, 由于 $\angle MAQ, \angle MBQ$ 均为直角, 因此点 Q 运动过程中四边形 $AMBQ$ 形状不变, 即点 Q 到圆心的距离 $MQ = 4$, 这就要求直线到圆心的距离小于等于4, 由此可求得 $-3 - 4\sqrt{5} \leq t \leq -3 + 4\sqrt{5}$.

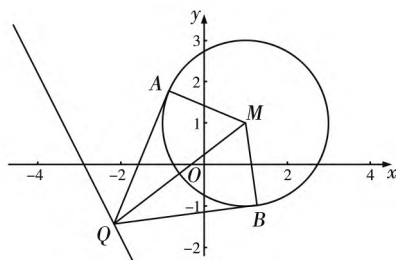


图2

生8: 根据 $M(1, 1)$ 为定点, 线段 $MQ = 4$ 可知, 点 Q 运动的轨迹为以 M 为圆心, 半径为4的圆, 同时点 Q 又在直线上, 因此只需直线和点 Q 轨迹圆有公共点即可.

师: 紧紧抓住相切的几何图形特征, 将角度不变转化为线段定长, 进一步转化为圆心到直线的距离问题或直线与圆位置关系, 十分灵活高效. 其实此问题的核心在于, 直线上要存在到圆心距离等于4的点, 而圆心到直线距离越小, 此条件越容易满足.

3.2 典例剖析, 深化理解

例题1 (2020年全国I卷理11) 已知 $\odot M: x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$, 直线 $l: 2x + y + 2 = 0$, P 为 l 上的动点, 过点 P 作 $\odot M$ 的切线 PA, PB , 切点为 A, B , 当 $|PM| \cdot |AB|$ 最小时, 直线 AB 的方程为().

A. $2x - y - 1 = 0$ B. $2x + y - 1 = 0$

C. $2x - y + 1 = 0$ D. $2x + y + 1 = 0$

生9: 由题可知 $PM \perp AB$.

因此 $S_{\text{四边形}APBM} = \frac{1}{2} \cdot |PM| \cdot |AB|$.

又 $S_{\text{四边形}APBM} = 2S_{\triangle AMP} = |AM| \cdot |AP| = 2|AP|$,

故有 $|PM| \cdot |AB| = 4|AP| = 4\sqrt{|PM|^2 - 4}$.

当 $PM \perp l$ 时, $|PM|$ 取得最小值, $|PM| \cdot |AB|$ 取得最小值, 此时 $AB \parallel l$, 可排除 A, C 选项.

(教师用几何画板展示图3, 引导学生观察动态图形)

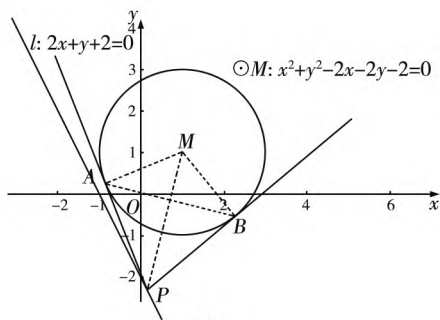


图3

生10: $PM \perp l$ 时, 可以求得 $|PM|_{\min} = \frac{5}{\sqrt{4+1}} =$

$\sqrt{5}$, 此时 $|AB| = \frac{4}{\sqrt{5}}$, 则 $d_{M-AB} = \sqrt{|AM|^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \frac{4}{\sqrt{5}}$,

由此检验 $M(1, 1)$ 到 B, D 两选项直线的距离可知, 应选 D.

生11: AB 直线也可以看作以线段 PM 为直径的圆与圆 M 的公共弦(几何画板展示图4), 通过两圆方程相减求出公共弦方程.

由 $PM \perp l$ 可求得 $PM: x - 2y + 1 = 0$, 与 l 交于点 $P(-1, 0)$, 用直径式求出圆方程

$$(x-1)(x+1) + (y-1)(y-0) = 0.$$

整理, 得 $x^2 + y^2 - y - 1 = 0$.

与圆 M 方程相减得直线 $AB: 2x + y + 1 = 0$.

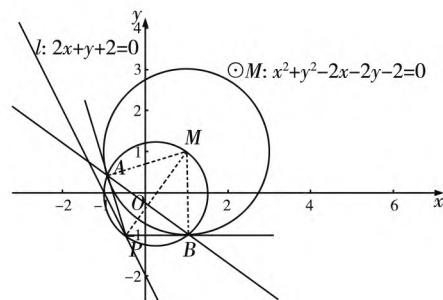


图4

生12: 通过精准作图可知, 满足条件时直线 AB 在

y 轴上截距为负, 可较快得出应选 D.

(教师用几何画板展示图5, 验证生12想法)

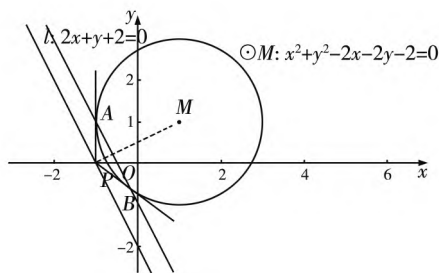


图5

师: 生9 通过观察图形的几何特征并进行巧妙转化, 找到最值位置, 化动为静, 又采取选择题解题策略, 排除两个错误选项, 提高了解题正确率. 生10、生11 从不同角度通过一定量的计算得出了准确答案. 生12 通过观察图形, 利用选择题策略从选项入手, 秒杀正确答案. 通过前面的练习, 各位同学对于圆与直线相切问题的这个基本图象的相关问题有了更深刻的理解, 几何解法体现出了较大的优势, 图形转化起来也更加熟练、灵活, 下面我们把条件稍作变化.

例2 (2011年全国卷文20) 在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 $y = x^2 - 6x + 1$ 与坐标轴的交点都在圆 C 上.

(1) 求圆 C 的方程;

(2) 若圆 C 与直线 $x - y + a = 0$ 交于 A, B 两点, 且 $OA \perp OB$, 求 a 的值.

生13: 圆 $C: (x-3)^2 + (y-1)^2 = 9$; 第二问由 $OA \perp OB$ 可知, 点 O 在以线段 AB 为直径的圆上, AB 则为此圆与圆 C 的公共弦, 猜测可用公共弦法解决.

师: 生13 想法很好, 通过垂直关系发现了隐性圆, 很多同学和他也有相似的想法, 请同学们操作一下, 求出参数 a 的值.

生13: 求解过程有些困难, A, B 两点的坐标都无法确定, 以线段 AB 为直径的圆方程不好求.

生14: 可设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 以线段 AB 为直径的圆方程为

$$(x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = 0.$$

化简, 得

$$x^2 + y^2 - (x_1 + x_2)x - (y_1 + y_2)y + x_1x_2 + y_1y_2 = 0.$$

观察式子结构联想到韦达定理, 将直线方程与圆

$$\text{方程联立} \begin{cases} (x-3)^2 + (y-1)^2 = 9, \\ x - y + a = 0. \end{cases}$$

$$\text{消元, 得 } 2x^2 + 2(a-4)x + a^2 - 2a + 1 = 0.$$

由题意直线与圆相交应满足

$$\Delta = 56 - 16a - 4a^2 > 0.$$

$$\text{从而} \begin{cases} x_1 + x_2 = 4 - a, \\ x_1 x_2 = \frac{a^2 - 2a + 1}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = x_1 + x_2 + 2a = 4 + a, \\ y_1 y_2 = x_1 x_2 + a(x_1 + x_2) + a^2 = \frac{a^2 + 6a + 1}{2}. \end{cases}$$

将这些式子代入圆方程可得 $x^2 + y^2 - (4 - a)x - (4 + a)y + a^2 + 2a + 1 = 0$, 原点 $(0, 0)$ 在此圆上, 代入可求得 $a = -1$.

生 15: 不必求出以线段 AB 为直径的圆方程, $OA \perp OB$ 可利用向量数量积 $x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$ 更快得到等量关系!

师: 同学们的讨论非常热烈, 得出的结论也很有价值. 通过上面三位同学的讨论, 我们容易发现几何解法不是一定更容易的, 该要算时也得算, 低头计算前不妨先抬头考察不同算法的难易, 以求用更简计算解决问题.

变式 2 若圆 C 与直线 $x - y + a = 0$ 交于 A, B 两点, 且 $CA \perp CB$, 求 a 的值.

生 16: 已知 $C(3, 1)$, 则 $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = x_1 x_2 - 3(x_1 + x_2) + y_1 y_2 - (y_1 + y_2) + 10 = 0$, 代入韦达定理式, 结合 $\Delta = 56 - 16a - 4a^2 > 0$, 可解得 $a = 1$ 或 -5 .

生 17: 从图形上看, 由 $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB}$ 且 $CA = CB = 3$, 则 $\triangle CAB$ 为等腰直角三角形, 因此圆心 C 到直线 AB 的距离为 $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{|3 - 1 + a|}{\sqrt{2}}$, 也可解得相同答案.

师: 显然生 17 的几何解答更为精妙!

4 教学感悟

4.1 注重引导, 引导学生面对问题主动探究

“教解法不如教想法.” 本节课中教师层层铺垫, 从学生较熟悉的问题起步, 慢慢挖掘、步步深入, 注重引导学生独立审题、独立思考、提出想法、交流解法, 这样当学生面对新的问题情境时, 能够有意识地根据自己已有的解题经验, 抱着一种研究者的心态, 克服畏难情绪, 以探究者的心态, 深入挖掘题目中的信息, 分析、解决问题.

教师有意识地引导学生利用几何画板工具来探究几何图形, 虽然绘制第一幅图片时学生花费了一些时间, 但教师有意将本节课探究的问题从同一背景条件展开, 后续学生作图只需在前面的图形上稍作修

改, 大大提高了探究效率.

4.2 生生对话、师生对话, 使数学探究真发生

在本节课中, 通过学生与学生、教师与学生的对话实现对问题的探讨, 在对话中, 学生的思维发散开来, 对于所学知识进行广泛联系、有意识地从不同视角去观察和分析, 不同的想法碰撞出智慧的火花, 提升了学生的思维质量, 激发了学生的创造力, 在不断地对话探讨中, 一个个复杂的问题被抽丝剥茧逐步攻克. 在对话中, 学生大胆发表不同的解法, 并有意识地比较解法的优劣, 有利于学生在后续的解题前先进行解法的选择, 简化计算提高解题速度与正确率.

4.3 巧妙设问, 让探究学习中充满矛盾与惊喜

教师在设计问题时, 不仅注重难度的层层设问, 并且当学生在课前热身与例题 1 的不断变式练习中, 对于此类问题的基本图形理解不断深入, 图形转化趋于熟练, 对于这类问题解决渐渐走入图形转化的固定模式时, 设计了例题 2, 尤其在第二问中, 学生通过探究发现之前熟悉的几何解法优势不再, 反而传统的“设而不求”的代数方法能够快速解决问题时, 学生心中产生强烈的矛盾冲突, 颇有“豁然开朗”之感. 相信经历过这种冲突感, 学生对于解析几何的几何与代数解法会有更加深刻的理解.

4.4 技术辅助, 为学生探究学习锦上添花

在本节课中, 几何画板的使用无疑为学生探究图形特点提供了极大的便利, 使学生能够更直观地从图形中观察到数学问题中所要求的最值位置, 从而能够帮助学生形成解题思路. 同时, 几何画板绘图的过程也是学生自主探究的过程, 通过画图, 图形间的位置关系梳理清楚了, 直观想象能力自然而然地得到了锻炼. 在信息技术辅助教学的过程中也需注意, 信息技术只是工具, 起到辅助作用, 教学时需注意时间分配, 提前做好必要的准备, 才能更好地提高课堂效率.

参考文献:

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准 (2017 年版) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2018.

[2] 黄天扬. 直线与圆位置关系的化归处理 [J]. 理科考试研究, 2016, 23(07): 5.

[3] 施洪菊. 直线与圆中的定点、定值问题 [J]. 考试 (高考数学版), 2011(21): 84-86.

[4] 黄荣. 运用直线与圆位置关系研究一类几何最值问题 [J]. 中学生数学, 2017(20): 41-42.

(收稿日期: 2022-10-02)