基于思维能力提升的高三一轮复习

江苏省南京市秦淮区教师发展中心　黄智华

高三一轮复习如何进行，重点关注什么，这是高三一轮复习教学中值得研究的问题. 复习如果只是对基础知识的简单罗列，应用知识解习题，难免会使学生厌倦；如果只是习题解法的演示，就题论题，又会使学生深陷题海无所适从. 事实上，复习课要引导学生将所学的知识进行梳理归纳和建立相互联系，使学生对知识及其内在联系有更清晰、更深刻的认识，进一步完善学生的知识结构和认知结构；通过对运用知识解决问题的分析和比较，感悟数学基本思想方法；通过对解题方法的概括提炼和优化，提升学生的思维品质和思维能力，发展学生的核心素养.

1.要梳理知识，更要关注学习知识的过程

复习“同角三角函数关系”这一内容时，不仅要学生梳理两个关系式：(1) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$；(2) $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，更要让学生关注学习这两个公式经历的过程，证明这两个公式.

方法1　利用三角函数的定义：因为 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}$，且 $x^2+y^2=r^2$，所以，$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$；$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

方法2　利用三角函数的几何意义(三角函数线). 如图1，角α的终边交单位圆于点P，则有向线段MP、OM分别是角α的正弦线和余弦线，即 $\sin\alpha=MP$，$\cos\alpha=OM$. 由于 $MP^2+OM^2=OP^2=1$，所以 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

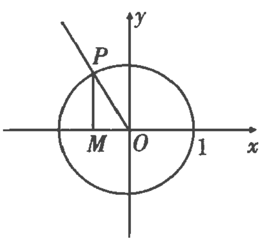

图1

让学生回归教材、体会公式的生成过程，可以加深学生对公式的理解，沟通了知识之间的相互联系，从数形两方面领悟三角函数定义，掌握当角α的终边与单位圆相交于点P时，点P的坐标是($\cos\alpha$，$\sin\alpha$)；反之，看到一个点的坐标为($\cos\alpha$，$\sin\alpha$)，就想起该点在单位圆上，且知道角α的终边位置，这就为学生灵活运用三角函数定义解题打下了坚实基础，思考问题时就可以从数形两个不同的角度进行思考，拓展学生思维，提升学生的思维能力.

例1　(江苏高考试题)如图2，在平面直角坐标系 xOy 中，以 Ox 轴为始边作两个锐角 α,β，它们的终边分别与单位圆交于A、B两点，已知A、B的横坐标分别为 $\frac{\sqrt{2}}{10}$、$\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

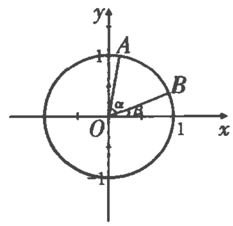

图2

(1)求 $\tan(\alpha+\beta)$ 的值；

(2)求 $\alpha+2\beta$ 的值.

学生在解题过程中，由于对三角函数的几何意义理解不透彻，没有数形结合的思想做引领，解题没有正确思路或者走了歪路. 其实，由三角函数的几何意义可得：$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{10}$，$\cos\beta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，由于$\alpha,\beta$都是锐角，从而有 $\sin\alpha=\frac{7\sqrt{2}}{10}$，$\sin\beta=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

因此 $\tan\alpha=7$，$\tan\beta=\frac{1}{2}$，

所以 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{7+\frac{1}{2}}{1-7\times\frac{1}{2}}=-3$.

例2 (2021年全国新高考试题)已知O为坐标原点，点 $P_1(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$P_2(\cos\beta,\ -\sin\beta)$，$P_3(\cos(\alpha+\beta),\ \sin(\alpha+\beta))$，$A(1,\ 0)$，则(　　).

A. $|\overrightarrow{OP_1}|=|\overrightarrow{OP_2}|$　　　B. $|\overrightarrow{AP_1}|=|\overrightarrow{AP_2}|$

C. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP_3}=\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}$　　　D. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP_1}=\overrightarrow{OP_2}\cdot\overrightarrow{OP_3}$

这是一个多选题，如果学生对三角函数的几何意义领会深刻，掌握熟练，学生就能发现点 P_1、P_2、P_3 都在单位圆上，且 $\angle AOP_1=\alpha$，$\angle AOP_2=-\beta$，$\angle AOP_3=\alpha+\beta$，所以 $\angle AOP_3=\angle P_2OP_1$ (如图3所示). 根据向量模和向量数量积的概念，可得正确答案是A、C.

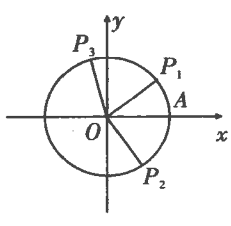

图3

学生深刻理解了三角函数几何意义,看到条件就想起单位圆上的点,且知道角的终边所在位置,运用数形结合的数学思想很容易得出答案.从纯代数的角度来研究,运算就显得比较繁琐.

再譬如,在高三一轮复习"二项式定理"这个内容时,不应只让学生默写二项式定理,更需要关注二项式定理得出的过程,让学生重温并真正理解"二项式定理"怎么会是这样形式的展开式,特别是每一项的二项式系数究竟怎么得来的?经历了过程,学生解决下面问题的时候就可能会有更好的思维方式,具备灵活运用方法解决问题的能力.

例3 (全国高考试题)$(x^2+x+y)^5$ 展开式中 x^5y^2 的系数是(　　).

A. 10　　B. 20　　C. 30　　D. 60

学生在解决问题的过程中,把 $(x^2+x+y)^5$ 写成 $[x^2+(x+y)]^5$,接着就不知道怎么做下去了.老师讲解的时候是把 $(x^2+x+y)^5$ 写成 $[(x^2+x)+y]^5$ 来研究的,较困难地做出了答案.

其实,运用研究二项式定理展开式的思想方法,有如下的思考过程:为了得到"x^5y^2",应该是两个因式 (x^2+x+y) 中取 x^2,一个因式 (x^2+x+y) 中取 x,剩下的两个因式 (x^2+x+y) 中取 y,故系数就是 $C_5^2\times C_3^1=30$.这样的思考过程才简洁有效.

高考是以知识为载体考查学生的能力,学生的能力只有在学习知识的过程中得到培养与发展.高三一轮复习,在梳理知识、让学生掌握知识的同时,更要让学生关注学习知识所经历的过程,做到过程与结果并重.有了过程才能有学生自己的思考与生成,学生才能领悟方法、学会思考,才能提升学生的思维能力.

2.要形成模式,更要让学生学会思考问题

高三一轮复习要通过日常的训练帮助学生形成经验,建立起常见的思维模式,使学生拿到常规问题知道如何去思考,以保证学生在相应的情境中快速提取,找到正确解题思路和解题方法,确保学生在有限的考试时间内尽可能多地解决相应的问题.数学基本活动经验的积累,从某种意义上讲就是积累思维模式、积累数学研究方法.

例4 函数 $y=\sin^2x+\cos^2(x-\frac{\pi}{3})$ 单调增区间是(　　).

学生:(降幂扩角)

$$y=\sin^2x+\cos^2(x-\frac{\pi}{3})=\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1+\cos(2x-\frac{2\pi}{3})}{2}$$

$$=1+\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{3}{2}\cos 2x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2x-\frac{\pi}{3})+1.$$

当 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$,

解得:$-\frac{\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{12}+k\pi$.

答案:$[-\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{5\pi}{12}+k\pi]$.

老师给出变式训练题:已知 $\sin(x+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{4}$,则 $\sin(\frac{5\pi}{6}-x)+\sin^2(\frac{\pi}{3}-x)=$(　　).

学生:(降幂扩角) $\sin(\frac{5\pi}{6}-x)+\sin^2(\frac{\pi}{3}-x)=\sin(\frac{5\pi}{6}-x)+\frac{1-\cos(\frac{2\pi}{3}-2x)}{2}$,展开……(运算过程非常繁琐).

师生解答:由于 $\frac{5\pi}{6}-x=\pi-(x+\frac{\pi}{6})$,$\frac{\pi}{3}-x=\frac{\pi}{2}-(x+\frac{\pi}{6})$,所以

$$\sin(\frac{5\pi}{6}-x)+\sin^2(\frac{\pi}{3}-x)$$
$$=\sin[\pi-(x+\frac{\pi}{6})]+\sin^2[\frac{\pi}{2}-(x+\frac{\pi}{6})]$$
$$=\sin(x+\frac{\pi}{6})+\cos^2(x+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{4}+1-\sin^2(x+\frac{\pi}{6})$$
$$=\frac{1}{4}+1-\frac{1}{16}=\frac{19}{16}.$$

这两类问题是三角函数这一章比较典型的问题,一类是研究三角函数性质;另一类是"给值求值",这两类问题有着不同的思维方式.第一类问题解决的基础是正弦函数 $y=\sin x$ 与余弦函数 $y=\cos x$ 的图象和性质,以及变换之后得到的函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ (A,ω,φ为常数)的图象和性质.第二类问题解决的基础是同角三角函数关系、三角恒等式,以及诱导公式.通过以上两个具体问题的解决,要帮助学生积累模型,建立如下思维模式:

(1)研究三角函数相关性质的问题,就要设法将函数解析式转化为一个角的一种三角函数形式,其中最常见的形式是:$y=A\sin(\omega x+\varphi)$ (A,ω,φ为常数),由于这个函数解析式是"正弦形式"的一次式,所以看到原题中出现了"三角函数形式"的二次式,就需要通过降幂扩角(逆用二倍角的余弦公式)将"二次式"变"一次式",体现化归数学思想.

(2)三角函数中的"给值求值"问题,解决这类问题的思考方式是:找到未知角与已知角的关系,设法将未知角表示为已知角,体现等价代换、化归的数学思想.

例5 (2021年全国乙卷第5题)设函数 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$,则下列函数中为奇函数的是(　　).

A. $f(x-1)-1$　　　B. $f(x-1)+1$

C. $f(x+1)-1$　　　D. $f(x+1)+1$

分析:函数 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ 是一个“一次分式”函数(老师们的俗称)，如何研究这一类型的函数？因为 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}=\frac{-(1-x)+2}{1+x}=-1+\frac{2}{1+x}$. 所以函数 $f(x)$ 的图象可以看作是反比例函数 $y=\frac{2}{x}$ 的图象向左平移1个单位，再向下平移1个单位得到. 由于反比例函数 $y=\frac{2}{x}$ 的图象的对称中心是(0,0)，所以 $f(x)$ 的图象的对称中心是(-1,-1). 函数 $f(x-1)+1$ 的图象是将函数 $f(x)$ 的图象向右平移1个单位，再向上平移1个单位得到，所以这个函数的对称中心是(0,0)，从而这个函数为奇函数. 答案:B.

对形如“一次分式函数 $f(x)=\frac{cx+d}{ax+b}(a\neq 0)$”的研究，高三一轮复习必须帮助学生建立如下思维模式:(1)“一次分式函数”一定是某一个“反比例函数”通过变换得到;(2)如何找到这个具体的反比例函数，并且清楚是如何得到的，这就需要将“一次分式函数”通过“分离常数法”来等价变形. 具体操作步骤是:①将分子表示为分母的形式. 就象上例中把分子“$1-x$”写成“$-(1+x)+2$”;②将“分式”拆开来书写，把常数分离出来. 例如 $\frac{-(1-x)-2}{1-x}=-1+\frac{2}{1+x}$;③如果分式前面出现的是“-”号，最好把“-”号放到分子上. 譬如 $-\frac{2}{1+x}$ 最好写成 $+\frac{-2}{1+x}$，这样就可以看作是反比例函数 $y=\frac{-2}{x}$ 是如何平移变换的，方便下面的研究和发现结论. 如果写成 $-\frac{2}{1+x}$，就需要有一个对称变换.

数学中有很多常见模型，通过日常的训练要帮助学生归纳提炼，形成实用、可操作的思维模式，使学生拿到该类问题就知道如何变形转化，有正确的解题思路. 在形成思维模式的同时，更要教会学生思考问题，弄清楚其中的道理，做到知其然，知其所以然，从而提升学生思维能力. 我个人认为，高三数学复习是:知识、技能、思想方法、思维模式的有机统一.

3.要学会解题，更要突显思想方法的引领

新高考以核心素养为导向，以关键能力考查为重点. 数学高考以“题”的形式出现，所以，高三数学复习的重点就是教会学生解题，教学以提高学生的数学解题能力为目标. 数学思想方法是对数学知识的进一步提炼、概括，是对数学内容的本质认识，数学思想方法能使学生领悟数学真谛，懂得数学价值，学会数学的思维，能把知识的学习与培养能力、发展智力有机地统一起来. 学生要学会解题，既要熟练基础知识与掌握基本方法，更要突显数学思想方法的引领.

例6　(南京市模拟试题)已知关于 x 的方程 $x^2+2a\log_2(x^2+2)+a^2-3=0$ 有唯一解，则实数 a 的值为(　　).

当年阅卷的结果显示，本题学生的得分率是0.2，能做对的学生寥寥无几. 面对这个无法求解的“超越”方程，学生感到很困难，无从下手.

怎么来研究解决这个问题？需要学生运用方程“上位”的概念函数来思考，突显函数方程思想. 令 $f(x)=x^2+2a\log_2(x^2+2)+a^2-3$，由条件得，函数 $f(x)$ 有唯一零点. 研究这个函数的性质发现:函数 $f(x)$ 是偶函数. 由偶函数的图象特征可以知道，偶函数有唯一零点，这个零点一定是 $x=0$，所以有 $f(0)=0$，由此可得 $a=1$ 或 -3. 代入分析与思考，发现 $a=-3$ 不合题意，舍去. 故实数a的值为1.

能够将问题实现有效转化，突显函数与方程思想、数形结合思想的引领是解决问题的关键，所以在高三复习教学中要培养学生运用思想方法指导解题的意识.

例7　(2021年新高考试题第11题)已知点 P 在圆 $(x-5)^2+(y-5)^2=16$ 上，点 $A(4,\ 0)$，$B(0,\ 2)$，则(　　).

A. 点 P 到直线 AB 的距离小于10

B. 点 P 到直线 AB 的距离大于2

C. 当 $\angle PBA$ 最小时，$|PB|=3$

D. 当 $\angle PBA$ 最大时，$|PB|=3$

本题是个多选题，如果从代数角度来研究问题，就A、B选项是否正确，需要设出点 P 坐标 (x,y)，再由条件求出直线 AB 方程，然后由点到直线的距离公式列出点 P 到直线 AB 的距离，最后研究这个距离的最值和范围，整个解题过程繁琐，变形运算复杂，还不容易做对答案. 研究C、D选项的正确性就更困难了.

从“形”的角度思考问题，结合图形，运用“数形结合”的思想引领解题，四个选项中哪个对、哪个错就一目了然了.

如图4所示，圆心 $M(5,5)$ 到直线 $AB:\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$ 的距离为 $\frac{11\sqrt{5}}{5}<6$，所以点 P 到直线 AB 的距离小于6+4(半径)，故A正确.

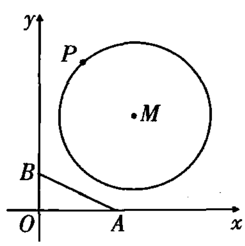

图4

圆心(5,5)到直线 AB

距离 $d\in(4,5)$，所以点P到直线AB的距离的最小值为：$\frac{11\sqrt{5}}{5}-4<2$，故B错误.

当$\angle PBA$最大或最小时，研究图形可得PB与圆相切，且切线在圆上方或下方(除切点外). 因为$MB=\sqrt{5^2+3^2}$，半径$r=4$，由直角三角形中的勾股定理可得$|PB|=\sqrt{34-16}=3\sqrt{2}$. 故C、D正确.

数学思想方法是数学的精髓，它对数学教育以及学生的数学学习具有决定性的指导意义. 高中数学教学中常出现的、高考常考的数学思想方法有：数形结合思想、化归转化思想、函数方程思想、分类讨论思想、算法思想、统计思想、极限思想. 新高考背景下的高三复习教学要突显数学思想方法对学生解题的引领，切实提高学生数学解题能力.

4.要强化练习，更要优化学生的思维品质

高三数学复习需要强化练习，以帮助学生熟练掌握基础知识、基本方法、领悟数学思想，积累丰富基本活动经验. 以素养为导向的高考数学命题，特别关注数学学习过程中的思维品质.《2020年全国数学高考分析报告》中指出：理性思维在数学素养中起着最本质最核心的作用，高考数学突出理性思维. 高三复习备考除了要强化练习，更重要的是思维品质的优化.

例8 (2021年全国高考甲卷20题)抛物线C的顶点坐标原点O，焦点在x轴上，直线l: $x=1$交C于P, Q两点，且$OP\perp OQ$.已知点$M(2,0)$，且$\odot M$与l相切.

(1)求C的方程；

(2)设A_1，A_2，A_3是C上的三个点，直线A_1A_2，A_1A_3均与$\odot M$相切. 判断直线A_2A_3与$\odot M$的位置关系，并说明理由.

解：(1)C的方程：$y^2=x$.(解法略)

(2)理性分析：直线与圆相切，肯定是利用圆心到直线的距离等于半径来研究，一定要有直线方程，如何给出直线方程是本题的关键. 由于A_1，A_2，A_3三点都在抛物线$y^2=x$上，一种想法是设出三点坐标，分别是$(y_1^2,\ y_1)$，$(y_2^2,\ y_2)$，$(y_3^2,\ y_3)$，然后分别写出三条直线A_1A_2，A_1A_3，A_2A_3的方程，接着就开始研究. 有下面的解法：

解：圆心M到直线l的距离为1，故半径为1，圆的方程为$(x-2)^2+y^2=1$，直线A_2A_3与圆相切. 设$A_1(y_1^2,y_1)$，$A_2(y_2^2,\ y_2)$，$A_3(y_3^2,\ y_3)$，直线A_1A_2的方程为$y=\frac{y_1-y_1}{y_2^2-y_1^2}(x-y_1^2)+y_1$，整理得$x-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0$，又直线$A_1A_2$与圆相切，则有$\frac{|2+y_1y_2|}{\sqrt{1^2+(y_1+y_2)^2}}=1$，整理得

$$(1-y_1^2)y_2^2-2y_1y_2+y_1^2-3=0.$$

同理可得$(1-y_1^2)y_3^2-2y_1y_3+y_1^2-3=0$.

又$y_2\neq y_3$，故y_2，y_3是关于y的二次方程$(1-y_1^2)y^2-2y_1y+y-3=0$的两不等根，由韦达定理得，$y_2+y_3=\frac{2y_1}{1-y_1^2}$，$y_2y_3=\frac{y_1^2-3}{1-y_1^2}$.

圆心M到直线A_2A_3的距离为

$$\frac{|2+y_3y_2|}{\sqrt{1^2+(y_3+y_2)^2}}=\frac{\left|2+\frac{y_1^2-3}{1-y_1^2}\right|}{\sqrt{1+\left(1-\frac{2y_1}{1-y_1^2}\right)^2}}=\frac{\left|y_1^2+1\right|}{\sqrt{(1-y_1^2)^2+4y_1^2}}$$

$=\frac{\left|y_1^2+1\right|}{\left|y_1^2+1\right|}=1$，故直线$A_2A_3$与圆相切.

另一种想法是：设出点A_1的坐标$(y_1^2,\ y_1)$，然后引进斜率给出A_1A_2、A_1A_3方程. 设直线A_1A_2的方程为$y-y_1=k_1(x-y_1^2)$，直线A_1A_3的方程为$y-y_1=k_2(x-y_2^1)$，利用这两条直线都和圆M相切，可得k_1、k_2满足的关系式. 然后还要求出这两条直线与抛物线的交点A_2，A_3的坐标，再给出直线A_2A_3的方程，研究圆心到它的距离，这样的解题过程显然就很繁了，运算量也要大得多.

高三复习教学中，既要发散学生的思维，关注学生思维的宽度，更要讲理性思维，注重方法选择与优化，关注学生思维的长度，从而达到优化思维品质的目的.

新高考数学更加注重能力的考查，通过学科素养：理性思维、数学应用、数学探究、数学文化等方面的问题突出对学生思维能力的考查. 理性思维是数学教育的核心价值，高三复习要基于思维能力的提升，要特别关注学生理性思维的培养.

参考文献：

[1] 史宁中，王尚志. 普通高中数学课程标准(2017年版)解读[M]. 北京：高等教育出版社，2018

[2] 殷玉波. 新高考背景下，高三数学备考策略研究[J]. 中学数学教学参考，2022(2)：42-48.

[3] 黄智华. 高三第一轮复习教师究竟讲什么——以复习课"两角和与差的三角函数"为例[J]. 中学数学教学参考，2017(5)：47-50.