

素养导向的高中数学作业设计策略研究*

——以“复数乘、除运算的三角表示及其几何意义”为例

福建师范大学附属福清德旺中学(350319) 周宁

福清市教师进修学校(350300) 林新建

摘要 基于核心素养的作业注重基础知识的巩固与理解,注重思想方法的提炼与应用,注重核心素养的培养与提升.基于对新课程改革的理解,提出素养导向的作业设计策略:理解教材习题,制定素养作业目标;设计层次作业,实现素养不同发展;设计关联习题,增强建构知识能力;优化作业评价,提升学生成就感.

关键词 核心素养;作业设计;三角表示

1 问题提出

作业是学生巩固所学数学知识、技能和思想方法的必要途径,也是评价教师教学质量、学生学习效益的重要手段^[1].高质量的作业能够提升学生的数学素养,更能让学生获得积极的情感体验,充分发挥数学教育的引导作用.不能体现课标、教材及学情“三位一体”的作业,无论是对学生核心素养的培养还是教师的专业成长都是不利的.

“复数乘、除运算的三角表示及其几何意义”是2019人教A版必修第二册(以下简称“教材”)第七章“复数”第三节“复数的三角表示”的第二个内容,其中“复数的三角表示”为新增内容,也是标注“*”的选学内容.虽然作为选学内容,但是蕴含深刻的思想性.通过本节内容的学习,不仅可以认识复数乘、除运算的三角表示的几何意义是平面向量的旋转和伸缩变换,可以将复数、三角和平面几何问题转化为向量的问题去解决,体会几何与代数之间的密切关系,也为今后在大学期间学习复数的指数形式、复变函数论等高等数学知识奠定基础,具有承前启后的作用.

因此,本文以核心素养为导向,立足生情,以“复数乘、除运算的三角表示及其几何意义”为载体,提出作业设计的实践策略,增强学生对数学整体性的认识,促进学生数学学科核心素养的发展.

2 设计策略

2.1 理解教材习题,制定素养作业目标

习题(包含例题、练习、习题)是教材的重要组成部分,可以在帮助学生实践运用新知识的同时获得能力和学科核心

素养的提升,也是教师开展教学评价的重要资源.对教材习题进行研究,能更好地在作业设计中落实核心素养.喻平教授在文中指出对教材习题分析时应重点关注习题所体现的数学核心素养类型及相应素养所处的水平^[2].

通过对教材P89~P92的习题分析,可以将习题的设计意图归结为以下几类:(1)以复数的三角形式或代数形式为载体,考查复数乘、除运算的三角表示的掌握程度,培养逻辑推理、数学运算素养,其中对逻辑推理、数学运算素养的考查处于水平一;(2)能够利用复数乘法运算的三角表示解决一些代数问题,考查逻辑推理、数学运算素养,其中对逻辑推理、数学运算素养的考查都处于水平二;(3)考查利用复数乘、除运算三角表示的几何意义解决复数、平面几何问题,培养逻辑推理、直观想象、数学运算素养,相应的素养的考查处于水平二.

因此,确定本课时作业目标为:(1)能应用复数乘、除运算的三角表示进行简单的运算和证明,培养化归与转化思想,培养逻辑推理、数学运算素养;(2)能利用复数乘、除运算三角表示的几何意义解决与复数、三角或平面向量有关的问题,培养化归与转化、数形结合思想,培养逻辑推理、数学运算及直观想象素养.

2.2 设计层次作业,实现素养不同发展

作业结构遵循教材习题栏目(“复习巩固”、“综合应用”、“拓广探索”)的设计,同时做了个创新,增加新的栏目“数学思考”.这四个栏目突出基础性和发展性,既有对基础知识和基本能力的检测,又重视基本思想、基本活动经验的考查,更关注学生思维能力的发展.其中“复习巩固”主要体现基础性,考查学生对基本知识、基本技能的掌握,考查学生是否达到核心素养水平一;“综合应用”主要体现综合性、应用性、创新性,考查学生是否能够运用不同知识、思想方法,多角度观察、思考、分析和解决问题,考查学生是否达到核心素养水平一、水平二;“拓广探索”主要体现综合性、应用性、创新性,考查学生是否具有创新性思维,是否能够灵活运用

*本文是福建省教育科学“十四五”规划2021年度课题《基于核心素养的农村校高中数学校本作业设计研究》(编号:Fjjgzx21-327)的研究成果之一.

知识分析和解决问题, 考查学生是否达到核心素养水平二、水平三; “数学思考” 主要体现综合性、应用性、创新性, 以问题情境激发学生的数学思考, 让学生明白思考什么、如何思考, 深化对核心知识和思想方法的理解, 考查学生是否达到核心素养水平二、水平三.

例如考查复数乘、除运算的三角表示的掌握程度, 设计如下的作业习题:

例 1 (复习巩固) 复数 $\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ 的一个平方根是 ____.

例 2 (综合运用) 由复数乘法的三角表示可以得到 $(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$, 又

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta)^2 &= \cos^2 \theta + (2 \sin \theta \cos \theta) i + (i \sin \theta)^2 \\ &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + i (2 \sin \theta \cos \theta) \end{aligned}$$

所以 $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$, $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$, 即二倍角公式.

你能仿照以上方法推导正弦、余弦的三倍角公式, 并用 $\sin \theta$ 表示 $\sin 3\theta$, $\cos \theta$ 表示 $\cos 3\theta$ 吗?

例 3 (拓广探索) 求方程 $x^3 = 1$ 的三个复数根, 并说明它们之间的几何关系.

评析 例 1 需要学生通过逆向思维发现复数的一个平方根就是其辐角的一半; 例 2 以二倍角公式为背景将复数乘法的三角表示与三角恒等变换有机结合, 是一个创新与亮点, 能够提升学生对复数乘、除三角表示的理解, 也为例 3 做好铺垫; 例 3 是教材“探究与发现”栏目的改编, 以水平二的层次考查学生的逻辑推理与数学运算素养, 考查学生是否能够灵活运用复数乘法三角表示的特征解决问题, 深化对复数乘法三角表示的理解. 这三个例题都体现对本节核心知识的考查, 突出对概念理解与知识的联系, 但对关键能力的考查提出不同的要求. 从这些例题的作答教师可以了解学生核心素养的发展层次, 以便在后续教学中调整、优化教学策略, 进一步提升学生的素养层次.

2.3 设计关联习题, 增强建构知识能力

零散孤立的习题不利于学生建构数学知识的内在联系, 因此设计习题要注重前后之间的关联, 让学生能够进行合理整合, 将思维从“离散”转向“聚合”, 有助于提升核心素养的水平. 复数乘、除运算的三角表示的几何意义是平面向量的旋转和伸缩变换, 同时三角表示也与三角函数有关, 因此设计习题要充分体现复数、向量与三角函数之间的关系, 让学生充分体会数学知识的整体性, 建构起知识的框架, 从而实现知识方法以及学科思想的感悟与内化.

例 4 (1) 如图 1, 复平面内的 $\triangle ABC$ 是等边三角形, 它

的两个顶点 A, B 的坐标分别为 $(1, 0), (2, 1)$, 求点 C 的坐标.

(2) 已知对任意平面向量 $\overrightarrow{AB} = (x, y)$, 若将 $\overrightarrow{AB}$ 绕其起点沿逆时针方向旋转 θ 角得到向量 $\overrightarrow{AP}$, 求 $\overrightarrow{AP}$ 的坐标.

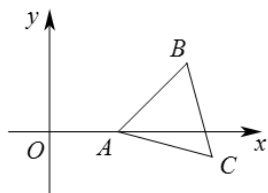


图 1 例 4(1)

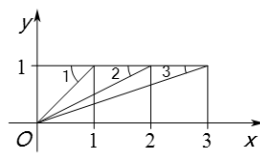


图 2 例 5

例 5 如图 2, 已知平面内并列的三个全等的正方形.

(1) 利用复数证明: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \frac{\pi}{2}$.

(2) 你能用其他的方法证明 (1) 中的结论吗?

例 6 (数学思考) 我们知道, 复数就是向量, 向量就是复数. 但是向量 $\mathbf{a}$ 满足 $\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2$, 复数 z 不满足 $z^2 = |z|^2$. 你能解释上述问题的原因吗?

评析 例 4 与例 5 都是在教材原题的基础上多设计一问, 其中例 4 的第二问是第六章“平面向量及其应用”习题 6.4 题 11 的背景知识 (没有给出推导), 例 5 的第二问希望学生能够从三角及平面几何的角度再予以证明. 例 6 “数学思考”是通过比较复数与平面向量及其运算的异同, 使学生能够理解数学对象及运算的本质. 以上例题侧重考查对知识本质的理解, 对学生的逻辑推理、直观想象以及综合应用所学知识分析问题、解决问题等数学学科素养和关键能力都提出较高的要求. 通过这些例题的作答, 学生对复数三角表示的乘、除法及几何意义的理解会达到一个更高的水平, 对复数与三角、平面向量联系性的认识会更为深刻.

2.4 优化作业评价, 提升学生成就感

课标指出日常评价与考试要根据学生的学习规律, 对于重要的概念、结论和应用的评价, 要循序渐进, 不要一步到位^[3]. 因此在评价学生核心素养的发展程度时, 不是简单看完成的对错, 而是以完成的过程来进行评价. 通过分析学生的解题思路, 可以评价是否达成相应的素养, 不同的解题方法对素养的要求是可以不同的; 通过分析学生的完成程度, 可以评价是否达成相应素养的水平. 因此, 在作业要求中, 要明确提出客观题也需要写出必要的解题步骤, 否则只看客观题的结果是无法准确评价学生素养是否达成以及达成的水平.

例 7 已知 $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$, 请写出一个使得 $z_1 z_2$ 运算结果是纯虚数的复数 z_2 : ____.

参考解析

解法一: 不妨令 $z_2 = i$, 则

由学生提问引发的深度学习 ——以“多边形的外角和”教学为例

广东省广州市华侨外国语学校 (510095) 陈文阳

广东实验中学越秀学校 (510095) 胡燕芬

摘要 问题是深度学习的出发点,借助学生提出的具有群体探究价值的数学问题,让学生广泛地参与到问题解决之中,能实现学生的深度学习.以“多边形的外角和”教学为例,从“学生能批判性理解学习、学生能迁移与应用知识、学生的问题解决有突破、学生的数学思维有创新”这四个方面分析由学生提问引发的深度学习的主要特征.

关键词 提出问题;深度学习;问题解决;创新思维

美国著名学者布鲁巴克指出,最精湛的教学艺术,遵循的最高准则就是让学生自己提出问题^[1].因为学生提出有价值的数学问题,是最精彩的课堂生成,是最宝贵的学习资源,能引发学生的深度学习.教学中,借助学生提出的具有群体探究价值的数学问题,让学生广泛地参与到问题解决之中,通过群体思考与探索获得认知发展,能实现学生的深度学习.现以人教版教材八年级上册第十一章“三角形”中“多边形的外角和”教学为例,呈现与分析笔者引导学生发现和提出数学问题,并在分析和解决问题中发生深度学习的课堂实践.

1 案例呈现

这是一节新授课,教学内容是多边形的外角和.课堂伊始,学生结合教师设计的问题,精读教材,理解学习内容,记录疑问之处或联想到的问题.接着,在师生互动与交流中回答教师所提出的问题,学生习得“多边形的外角和是 360° ”.随后,教师让学生说出自己的问题.其中,甲同学问:“如果多边形的边数越来越多,多边形就慢慢变成了一个圆,它的外角也就慢慢变小为 0° ,那么它的外角和还是 360° 吗?”

甲同学的问题引起班上学生的热烈讨论.有学生说:“多边形的边数很多时,它依然是一个多边形,不会变成圆.”也有学生说:“多边形的边数无穷多时就变成圆,那么每个外角就变小为 0° ,所以它的外角和为零.”还有学生说:“就算是多边形变成了圆,若沿圆走一周,刚好转了 360° ,所以它的外角和还是 360° .”……

看到学生意见不一,教师通过提问指导学生分析问题,大致过程如下.

$$z_2 = \frac{i}{z_1} = \frac{i}{-1 + \sqrt{3}i} = \frac{i(-1 - \sqrt{3}i)}{(-1 + \sqrt{3}i)(-1 - \sqrt{3}i)} \\ = \frac{\sqrt{3} - i}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i.$$

解法二:同上得

$$z_2 = \frac{i}{z_1} = \frac{i}{-1 + \sqrt{3}i} = \frac{\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}}{2(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi)} \\ = \frac{1}{2}(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i \sin(-\frac{\pi}{6})).$$

解法三: z_1 的模为 2, 一个辐角 $\theta = \frac{2\pi}{3}$, 故要使得 $z_1 z_2$ 的结果为纯虚数, 根据复数乘法的几何意义可知, 只需要 z_2 的辐角为 $\frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 故 z_2 可以是 $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ 及其倍数均可.

评价 学生若能用复数除法的代数形式求解, 说明达到数学运算素养水平一的要求; 若能用复数除法的三角表示求解, 说明达到直观想象、数学运算素养水平一的要求; 若能通

过辐角的关系完成本题, 说明达到逻辑推理、直观想象素养水平二的要求.

3 结语

新修订的课程方案要求“坚持素养导向”, 以培养学生的核心素养为方向、为目标. 作业是保证课程改革成功的关键领域, 是促进核心素养发展的重要手段. 高中一线数学教师应深入作业设计研究, 把作业设计能力作为教师的基本功, 在学习、实践、反思中设计出高质量的作业, 让作业真正发挥其育人的功能.

参考文献

- [1] 张永超. 基于核心素养落实的作业设计及其价值辨析[J]. 中学数学教学, 2022, 1: 4-8.
- [2] 喻平. 核心素养指向的数学作业设计[J]. 数学通报, 2022, 61(5): 1-7, 12.
- [3] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)[M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.